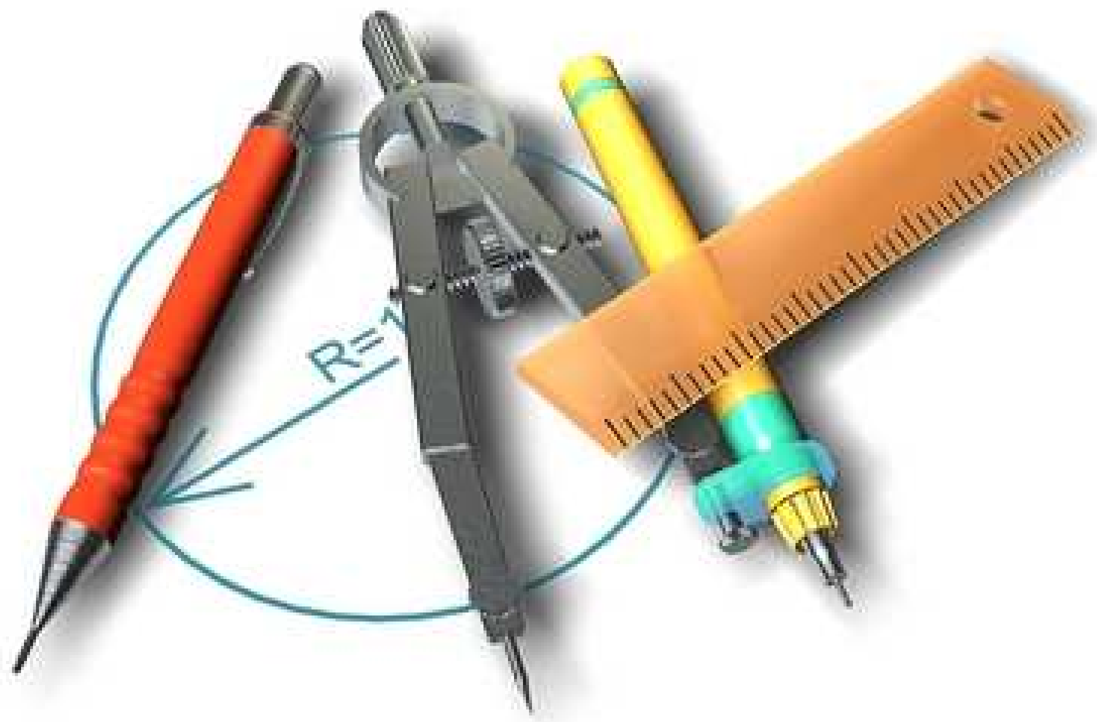
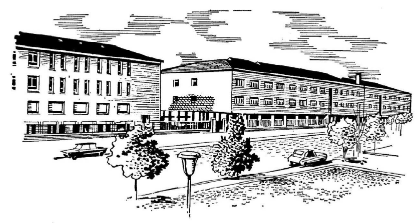




Colegio Romareda
AA.Recoletos
Zaragoza

CUADERNO DE TEORÍA DE MATEMÁTICAS

CURSO 2011 - 12

TERCER CICLO PRIMARIA

ALUMNO/A: ....

ÍNDICE

SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Un **sistema de numeración** es el conjunto de símbolos y reglas que nos permiten escribir y leer cualquier número.

Nuestro sistema de numeración, que es el **decimal**, procede de la India y llegó a Europa con los árabes en el siglo XIII.

Se llama **decimal o de base 10** porque cuenta los objetos agrupándolos de 10 en 10. También utiliza diez símbolos, llamados cifras o guarismos, que son:

0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9

Según el orden en que escribamos estas cifras obtendremos números distintos:

12.345 = doce mil trescientas cuarenta y cinco.

54.123 = cincuenta y cuatro mil ciento veintitrés.

- **Cada diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.**

Clases y órdenes de unidades:

En un número cualquiera, la cifra que ocupa el **primer lugar** de la derecha corresponde a las **unidades**. El **segundo lugar** corresponde a las **decenas**. El **tercer lugar** corresponde a las **centenas**. El **cuarto lugar** corresponde a las **unidades de mil**, etc.

Cada lugar a la izquierda tiene un valor 10 veces mayor que el de la derecha. Cada lugar equivale a un **orden**. Cada tres órdenes forman una **clase**. En el siguiente cuadro figuran las clases, órdenes y unidades:

BILLONES			MILES DE MILLONES			MILLONES			MILES O MILLARES			UNIDADES			CLASES
15º	14º	13º	12º	11º	10º	9º	8º	7º	6º	5º	4º	3º	2º	1º	ÓRDENES
Centena de billón	Decena de billón	Unidad de billón	Centena de millar de millón	Centena de millar de millón	Centena de millar de millón	Centena de millón	Decena de millón	Unidad de millón	Centena de mil	Decena de mil	Unidad de mil	Centena	Decena	Unidad	

NUMERACIÓN ROMANA

El sistema de **numeración romana** se desarrolló en la antigua Roma y se utilizó en todo su imperio. En este sistema las cifras se escriben en determinadas letras a las que se ha asignado un valor numérico. Las letras son siempre mayúsculas, ya que en el alfabeto romano no existen las minúsculas.

Este tipo de numeración debe utilizarse lo menos posible, sobre todo por las dificultades de lectura y escritura que presenta.

Se usa principalmente:

- En los números de capítulos y tomos de una obra.
- En los actos y escenas de una obra de teatro.
- En los nombres de papas, reyes y emperadores.
- En la designación de congresos, olimpiadas, asambleas, certámenes...

Reglas:

- La numeración romana utiliza siete letras mayúsculas a las que corresponden los siguientes valores:

Letras	I	V	X	L	C	D	M
Valores	1	5	10	50	100	500	1.000

Ejemplos: XVI = 16; LXVI = 66

- Si a la derecha de una cifra romana de escribe otra igual o menor, el valor de ésta se suma a la anterior.

Ejemplos: VI = 6; XXI = 21; LXVII = 67

- La cifra "I" colocada delante de la "V" o la "X", les resta una unidad; la "X", precediendo a la "L" o a la "C", les resta diez unidades y la "C", delante de la "D" o la "M", les resta cien unidades.

Ejemplos: IV = 4; IX = 9; XL = 40; XC = 90; CD = 400; CM = 900

- En ningún número se puede poner una misma letra más de tres veces seguidas. En la antigüedad se ve a veces la “I” o la “X” hasta cuatro veces seguidas.

  Ejemplos: XIII = 13; XIV = 14; XXXIII = 33; XXXIV = 34

- La “V”, la “L” y la “D” no pueden duplicarse porque otras letras (“X”, “C”, “M”) representan su valor duplicado.

  Ejemplos: X = 10; C = 100; M = 1.000

- Si entre dos cifras cualesquiera existe otra menor, ésta restará su valor a la siguiente.

  Ejemplos: XIX = 19; LIV = 54; CXXIX = 129

- El valor de los números romanos queda multiplicado por mil tantas veces como rayas horizontales se coloquen encima de los mismos.

  Ejemplos: $\overline{\mathrm{M}}$ = 1.000.000 $\overline{\mathrm{MM}}$ = 2.000.000 $\overline{\mathrm{MMM}}$ = 3.000.000

  $\overline{\mathrm{IV}}$ = 4.000 $\overline{\mathrm{CCC}}$XLIX = 300.049

POTENCIAS

Definición: potencia es un producto de factores iguales

Las potencias están formadas por una **base** y un **exponente**
BASE (2): es el factor que se repite. EXPONENTE (4): indica el número de veces que debe multiplicarse la base por sí misma**.**

$$2^4$$

Para leer una potencia, nombramos el número de la base y el número del exponente separados por la expresión “elevado a”.

Potencia de base 10

Normalmente, las potencias con base 10, por la cantidad que represente el exponente, esa será la cantidad de ceros en el resultado. El resto de la base, para sacar el resultado el número se multiplica por sí mismo cuantas veces indique el exponente.

Propiedades de la potencia

Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1

Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.

El producto de dos o más potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes. Se coloca la misma base y se suman los exponentes.

La división de dos potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos. Se coloca la misma base y se restan los exponentes.

La potencia de un producto de base (a·b) y de exponente "n" es igual a la potencia "a" a la "n" por "b" a la "n". Cada base se multiplica por el exponente.

La potencia de una potencia de base a es igual a la potencia de base a elevada a la multiplicación de ambos exponentes. Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. así se obtiene esta potencia

Siendo n cualquier nº real positivo		
PROPIEDADES	**EJEMPLO 1**	**EJEMPLO 2**
$1^n = 1$	$1^{50} = 1$	$1^{473} = 1$
$0^n = 0$	$0^{100} = 0$	$0^{1000}= 0$
$a^0 = 1$	$34^0 = 1$	$(-7)^0 = 1$
$a^m . a^n = a^{m+n}$	$7^2 . 7^4 = 7^{2+4} = 7^6$	$(-2)^5 . (-2)^3 = (-2)^{5+3} = (-2)^8$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$7^5 : 7^2 = 7^{5-2} = 7^3$	$(-2)^5 / (-2)^3 = (-2)^2 = 2^2$
$(a^n)^m = a^{m.n}$	$(7^3)^7 = 7^{3.7} = 7^{21}$	$((-2)^2)^3 = (-2)^6 = 2^6$
$(a . b . c)^m = a^m . b^m . c^m$	$(3 . 5 . 7)^6 = 3^6 . 5^6 . 7^6$	$(12 . 4 . 9)^2 = 12^2 . 4^2 . 9^2$
$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(8/3)^{10} = 8^{10}/3^{10}$	$(-2/3)^4 = 2^4/3^4$
$(a/b)^{-n} = (b/a)^n = b^n/a^n$	$(8/3)^{-10} = 3^{10}/8^{10}$	$(8/3)^{-40} = 3^{40}/8^{40}$
$a^{-n} = (1/a)^n = 1^n/a^n$	$3^{-2} = (1/3)^2 = 1/3^2$	$5^{-3} = (1/5)^3 = 1/5^3 = 1/125$

RAÍZ CUADRADA

La raíz de un número es aquel que multiplicado por sí mismo nos da el radicando.

La $\sqrt{\ }$ se llama signo radical. El número o expresión dentro del radical se llama radicando. Toda la expresión, incluyendo el signo radical y el radicando recibe el nombre de expresión radical. Otra parte de una expresión radical es su índice. El índice indica la "raíz" de la expresión. Las raíces cuadradas tienen un índice de 2. El índice de las raíces cuadradas por lo general no se escribe.

Ejercicio práctico de una Raíz Cuadrada

$\sqrt{\ }$ **54321**

1º Se separa el número en cifras de dos en dos empezando por la derecha: 5-43 -21.

2º Empezando por la izquierda, tomamos el número primero de la separación que hemos hecho. En nuestro caso es un 5. Se busca un número que multiplicado por sí mismo (su cuadrado) nos dé ese número. En nuestro caso 5 o una cifra inferior a 5 lo más proxima a 5. Esto es: 2 x 2 = 4, (4 es el número más próximo de un cuadrado). El 2 es nuestro primer número del resultado que buscamos

$\sqrt{\ }$ **5 43 21**	**2**

3º A continuación restamos el cuadro de 2, 2x2=4

$\sqrt{\ }$ **5 43 21**	**2**
.........**-4**	
.... **1**	

4º Sacamos el doble del resultado 2x2=4 y lo colocamos en la casilla gris. Se baja el grupo par siguiente (43).

$\sqrt{\ }$ **5 43 21**	**2**
........- **4**	**4**
.... **1 43**	

5º Del número que hemos bajado (43), se prescinde del último número (3) para dividir las dos primeras cifras (14) entre el número de la casilla gris (4); esto es 14:4 = 3 (no sacamos decimales), el resultado y lo colocamos en la casilla gris al lado del 4, esto es 43.

√ **5 43 21**	**2**
........- **4**	**43**
.... **1 43**	

6º El 43 x 3= 129. Se resta este resultado (129) de 143. Esto es 143-129 = 014

√ **5 43 21**	**2**
........- **4**	**43 x 3 = 129**
.... **1 43**	
.... **-1 29**	
.... **0 14**	

7º Se sube el 3 a la casilla del resultado. En la casilla azul, se saca el doble de 23 y se pone allí: 23 x 2 = 46. se baja en la casilla verde el 21.

√ **5 43 21**	**23**
........- **4**	**43 x 3 = 129**
.... **1 43**	**46**
.... **-1 29**	
.... **0 14 21**	

8º En la casilla verde, prescindimos del último número (un 1) y el resto (142) se divide por el número de la casilla azul (46), Esto es: 142:46= 3 (no calculamos decimales). El 3 se sube a la casilla del resultado y también el 3 se le añade al 46 de la casilla azul y el numero se multiplica también por 3.. Esto es: 463 x 3 =1389. Este resultado lo colocamos en la casilla granate y lo restamos de la verde: 1429-1389 = 0032

√ **5 43 21**	**233**
........- **4**	**43 x 3 = 129**
.... **1 43**	**463 x 3 = 1389**
.... **-1 29**	
.... **0 14 21**	
....	
.... **00 32**	

9. Prueba para ver que nos ha salido bien: 233 x 233 = 54.289 + 32 = 54321

DIVISIBILIDAD

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Definición: Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces, es decir, cuando la división del primero entre el segundo es exacta.

10 es múltiplo de 2 ya que 10 : 2 = 5 y r = 0

Para indicar abreviadamente que un número es múltiplo de otro escribiremos:

$10 = \dot{2}$; se lee 10 es múltiplo de 2.

Un número tiene infinitos múltiplos. **Se obtienen** multiplicando sucesivamente el número por los números naturales (0, 1, 2, 3…)

$\dot{3} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18...\}$ $\dot{7} = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42...\}$

Propiedades de los múltiplos:

- El cero es múltiplo de cualquier número. El producto de cualquier número por 0 es igual a 0

  $5 \times 0 = 0 \rightarrow 0 = \dot{5}$ $12 \times 0 = 0 \rightarrow 0 = \dot{12}$

- Un número siempre es múltiplo de sí mismo. El producto de cualquier número por 1 es igual a dicho número.

  $5 \times 1 = 5 \rightarrow 5 = \dot{5}$ $12 \times 1 = 12 \rightarrow 12 = \dot{12}$

- La suma de varios múltiplos de un número es múltiplo de ese número.

  60 y 12 son múltiplos de 4. Su suma, 72, también es múltiplo de 4.

- La diferencia de dos múltiplos de un número es múltiplo de dicho número.

  30 y 24 son múltiplos de 2. Su diferencia, 6, también es múltiplo de 2.

- El producto de múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

  1 y 12 son múltiplos de 3. Su producto, 48, también es múltiplo de 3.

- Si un número es múltiplo de otro, todos los múltiplos del primero son múltiplos del segundo.

  Si $15 = \dot{5} \rightarrow$ Como $60 = \dot{15}$, también $60 = \dot{5}$

DIVISORES DE UN NÚMERO

Definición: Un número es divisor de otro cuando está contenido en él un número exacto de veces, es decir, cuando la división del segundo entre el primero es exacta.

2 es divisor de 10 ya que 10 : 2 = 5 y r = 0

Para indicar abreviadamente que un número es divisor de otro, escribiremos:

4 = D (12) ; se lee 4 es divisor de 12.

Para hallar todos los divisores de un número:

- Se escribe como producto de dos factores empezando con el factor 1.
- Se termina cuando se repitan los factores.

Ejercicios: Halla todos los divisores de 45 y de 100

45 = 1 x 45
45 = 3 x 15
45 = 5 x 9
45 = 9 x 5 (Se repiten los factores)

D (45) = / 1, 3, 5, 9, 15, 45/

100 = 1 x 100
100 = 2 x 50
100 = 4 x 25
100 = 5 x 20
100 = 10 x 10
100 = 20 x 5 (Se repiten los factores)

D (100) = /1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100/

Propiedades de los divisores:

- El uno es divisor de cualquier número. La división de cualquier número entre 1 es siempre exacta.

  5 : 1 = 5 y r = 0 → 1 = D (5)

- Un número siempre es divisor de sí mismo. La división de cualquier número entre sí mismo es siempre exacta.

  15 : 15 = 1 y r = 0 → 15 = D(15)

- Si un número es divisor de otro y éste lo es de un tercero, el primer número es divisor del tercero.

  Si 5 = D (10) y 10 = D(20), observa que 5 = D(20)

NÚMEROS PARES E IMPARES

Se llama **número par** a todo **número múltiplo de** 2. Se representa por la expresión **2n**, siendo **n** un número natural cualquiera.

Números **impares** son los **números que no son múltiplos de 2**. Se representa por la expresión **2n + 1**, siendo **n** un número natural cualquiera.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Para saber si un número es divisible por otro, se divide por él y se comprueba si la división es exacta. En algunos casos, la realización de la división puede evitarse aplicando los llamados criterios de divisibilidad.

Definición: Los criterios de divisibilidad son unas reglas que nos permiten averiguar, en algunos casos, si un número es o no es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Son 14percialmente útiles en la descomposición de los números en sus factores primos.

Reglas: Un número es divisible por:

⇒ 2 ---- Si acaba en cero o en cifra par (2, 4, 6, 8)

12.078 es divisible por 2 porque 8 es cifra par.

⇒ 3 ---- Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

1.428 es divisible por 3 porque 1+4+2+8 = 15 que es múltiplo de 3

⇒ 4 ---- Si las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4.

⇒ 5 ---- Si acaba en cero o en cinco.

⇒ 6 ---- Si es a la vez de 2 y de 3.

246 es divisible de 6 porque:

246 es divisible de 2 (termina en cifra par) y de 3 (las cifras suman 12) a la vez.

⇒ 8 ---- Si las tres últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 8.

⇒ 9 ---- Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

25.065 es divisible por 9 porque 2+5+0+6+5 = 18 que es múltiplo de 9

⇒ 10 – Si acaba en cero.

⇒ 11 – Cuando la diferencia entre la suma de las cifras del lugar par y la suma de las cifras del lugar impar es múltiplo de 11.

709.181 es múltiplo de 11 porque:

(7+9+8) - (0+1+1) = 24 - 2 = 22 que es múltiplo de 11

99.385 es múltiplo de 11 porque:

(9+3+5) - (9+8) = 17 - 17 = 0 que es múltiplo de 11

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

- **Número primo**: Un número natural distinto de 1 es número primo si sólo tiene como divisores la unidad y el mismo número.

- **Número compuesto**: Un número natural es compuesto si tiene otros divisores además del 1 y del mismo número.

- Para averiguar si un número es primo o compuesto hacemos lo siguiente:
  - **Dividimos** este número por los números primos 2, 3, 5, 7, 11…, hasta llegar a una división exacta o a una división cuyo cociente sea igual o menor que el divisor.
  - Si algunas de las divisiones es **exacta**, el número es **compuesto**.
  - Si todas las divisiones son **enteras**, el número es **primo**.

Ejercicio: averigua si el número 173 es primo

- 173 no es múltiplo de 2 porque no acaba en cifra par.
- 173 no es múltiplo de 3 porque 1+7+3 = 11 y 11 no es múltiplo de 3.
- 173 no es múltiplo de 5 porque no acaba en 0 ni en 5.
- 173 : 7 = 24 y r = 5 no es exacta.
- 173 : 11 = 15 y r = 8 no es exacta; seguimos porque 15 es mayor que 11
- 173 : 13 = 13 y r = 4 no es exacta y no seguimos porque el cociente 13 es igual que el divisor 13.

En la última división, el cociente es igual al divisor y la división es entera: no es necesario seguir y vemos que el número es primo.

CRIBA DE ERATÓSTENES

Eratóstenes: vida

Astrónomo griego nacido en Cirene (actual Shatat, en la costa Libia) hacia el año 276 a. C. Murió en Alejandría hacia el año 196 a. C.

Discípulo de Arquímedes, fue historiador, además de geógrafo y astrónomo.

En matemáticas ideó un sistema de determinación de números primos. En geografía realizó un mapa del mundo entonces conocido que superó a todos los anteriores. En astronomía calculó el tamaño de la Tierra y dio como longitud de la circunferencia terrestre unos 40.000 km.

Criba de Eratóstenes

Es un método práctico para identificar números primos. Se procede así:

- Escribimos la serie natural de 1 a 99.
- Tachamos de 2 en 2 a partir del 2, se suprimen los números múltiplos de 2.
- Tachamos de 3 en 3 a partir del 3, se suprimen los números múltiplos de 3.
- Y así sucesivamente vamos tachando de 5 en 5, de 7 en 7, y de 11 en 11.

Pero al hacer esto se observa que los múltiplos de 11 ya están tachados, por lo que no hace falta continuar.

Los números que no han sido tachados (azules) son los números primos.

CRIBA DE ERATÓSTENES									
1	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

Definición: descomponer un número en factores primos es expresarlo como un producto de números primos.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$ $\qquad$ $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Regla práctica: para descomponer un número en factores primos lo dividimos sucesivamente por los números primos, empezando por el primer número primo mayor que 1 por el que sea divisible y hasta llegar a un cociente igual a 1.

24 --- 24 : 2 = 12 12 : 2 = 6 6 : 2 = 3 3 : 3 = 1

180 -- 180 : 2 = 90 90 : 2 = 45 45 : 3 = 15 15 : 3 = 5 5 : 5 = 1

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{24} & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{180} & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Dados dos números 12 y 30:

D (12) = /**1**, **2**, **3**, 4, **6**, 12/ D (30) = /**1**, **2**, **3**, 5, **6**, 10, 15, 30/

Los **divisores comunes** de 12 y 30 serán: /1, 2, 3, 6/ , porque **son los divisores que coinciden en ambos números**.

Al mayor de los divisores comunes, 6, lo denominaremos **máximo común divisor**. Se escribe:

m.c.d. (12, 30) = 6

Máximo común divisor

El **máximo común divisor** de dos o más números es el **divisor común más grande** o **mayor** que poseen dichos números.

Si el máximo común divisor de dos o más números es 1, diremos que esos números son **primos entre sí**.

D (8) = /1, 2, 4, 8/ D (9) = /1, 3, 9/

Divisores comunes: 1 -- m.c.d. (8, 9) = 1 por tanto: 8 y 9 son números primos entre sí

Para **calcular** el m.c.d. de varios números no es necesario calcular previamente todos los divisores comunes de dichos números, sino que puede efectuarse a partir de su descomposición en factores primos:

2. Descomponemos los números en **factores primos**.
3. Tomamos los **factores comunes** elevados a su **menor exponente**.
4. Efectuamos el **producto de los factores comunes** con el menor exponente.

Ejercicio: Halla el m.c.d (24, 60, 180)

1. Descomponemos los números en **factores primos**:

   $24 = 2^3 \times 3$ $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

2. Tomamos los **factores comunes** elevados a su **menor exponente:**

   m.c.d. $= 2^2 \times 3$

3. Efectuamos el **producto de los factores comunes** con el menor exponente:

   m.c.d. $= 2^2 \times 3 = 4 \times 3 =$ **12**

Por tanto el **m.c.d. (24, 60, 180) = 12**

Recuerda:

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor de sus divisores comunes.
El máximo común divisor de varios números es igual al producto de los factores primos comunes, elevados al menor exponente.

MÚLTIPLOS COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Dados dos números 9 y 12:

$\dot{9} = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108...\}$

$\dot{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108...\}$

Los **múltiplos comunes** de 9 y 12 serán: /36, 72, 108…/, porque **son los múltiplos comunes que coinciden en ambos números**.

Al menor de los múltiplos comunes, 36, lo denominaremos **mínimo común múltiplo** de 9 y 12. Y lo escribiremos:

m.c.m. (9, 12) = 36

Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el **menor de los múltiplos comunes**, distinto de cero, de dichos números.

Para **calcular** el m.c.m. de varios números no es necesario calcular previamente los múltiplos comunes de dichos números, a veces puede resultar una tarea fatigosa; sino que puede efectuarse a partir de su descomposición en factores primos:

1. Descomponemos los números en **factores primos**.
2. Tomamos los **factores comunes** y **no comunes** elevados a su **mayor exponente.**
3. Efectuamos el **producto** de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejercicio: Halla el m.c.m (24, 60, 180)

1. Descomponemos los números en factores primos:

   $24 = 2^3 \times 3$ $\quad$ $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ $\quad$ $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

2. Tomamos los **factores comunes** y **no comunes** elevados a su **mayor exponente.**

   m.c.m. = $2^3 \times 3^2 \times 5$

3. Efectuamos el **producto** de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

   m.c.m. = $2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$

Por tanto el **m.c.m. (24, 60, 180) = 360**

Recuerda:

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor de sus múltiplos comunes.

El mínimo común múltiplo de varios números es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

FRACCIONES

FRACCIÓN: es una o varias **partes iguales** en que se divide la unidad.

La fracción está formada por dos números naturales a y b colocado uno encima del otro y separados por una raya:

Fracción ...... $\frac{a}{b}$ $\qquad \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} \longrightarrow \frac{3}{5}, \frac{1}{14}, \frac{9}{20}, \frac{15}{8}$

Al número inferior (b) se le llama **denominador** e indica el número de partes iguales en que se divide la unidad. Al superior (a) se le llama **numerador** e indica el número de dichas partes de la unidad que se toman o consideran.

Una fracción también recibe el nombre de **quebrado** o **número fraccionario**.

LECTURA Y ESCRITURA DE FRACCIONES

Una fracción se lee enunciando primero el numerador y después el denominador:

- Para designar el **numerador** se utiliza el nombre del número que lo representa (seis, ocho, cuatro, nueve…).
- Para designar el **denominador** se emplea la siguiente regla:
  - Los denominadores 2 y 3 reciben nombre propio: **medio** y **tercio**.
  - Los denominadores entre 3 y 10 se nombran utilizando el **ordinal** que representan (cuartos, quintos, sextos…, décimos).
  - Los denominadores mayores que 10 se nombran añadiendo la terminación **–avo** al nombre del número (doceavo, quinceavo…)

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{14}$ c) $\frac{9}{22}$ d) $\frac{15}{8}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$

a) Tres quintos b) Un catorceavo c) Nueve veintidosavos

d) Quince octavos e) Dos tercios f) Un medio

CLASES DE FRACCIONES

- **Fracciones propias**: son las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador. Son menores que la unidad.

$$\frac{5}{8}, \frac{10}{25}, \frac{1}{3}, \frac{62}{80}, \frac{18}{40} < \mathbf{1}$$

- **Fracciones impropias**: son las fracciones cuyo numerador es igual o mayor que el denominador. Son iguales o mayores que la unidad.

$$\frac{5}{5}, \frac{45}{25}, \frac{23}{23}, \frac{99}{80}, \frac{18}{18}, \frac{12}{7} \geq \mathbf{1}$$

- **Fracciones mixtas** o **números mixtos**: se obtienen a partir de las fracciones impropias y están formadas por un número entero y la fracción propia correspondiente.

$$\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} \qquad \frac{128}{62} = 2\frac{4}{62}$$

¿Cómo pasar de fracción impropia a mixta?

Se divide el numerador para el denominador: el cociente es el entero, el resto el numerador y el divisor el denominador.

$$\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} \qquad 16 \,\underline{|\, 5} \longrightarrow 3\frac{1}{5}$$

1 3

¿Cómo pasar de fracción mixta a impropia?

Para hallar el numerador se multiplica el entero por el denominador y al resultado le sumamos el numerador. El denominador es el mismo que el de la fracción mixta.

$$2\frac{4}{62} = \frac{128}{62} \qquad 2 \times 62 + 4 = 128 \longrightarrow \frac{128}{62}$$

LA FRACCIÓN DE UN NÚMERO O CANTIDAD

- Para calcular la fracción de una cantidad, dividimos ésta por el denominador y el resultado lo multiplicamos por el numerador.

  Halla los **3/5 de 125** € ⟶ 125 : 5 = 25 25 x 3 = **75 €**

- Para calcular el **tanto por ciento** (%) de una cantidad, dividimos ésta por 100 y el resultado lo multiplicamos por el tanto.

  Halla el 20 % de 1200 € ⟶ 20 % = 20/100 ⟶ 1200 : 100 = 12 12 x 20 = **240 €**

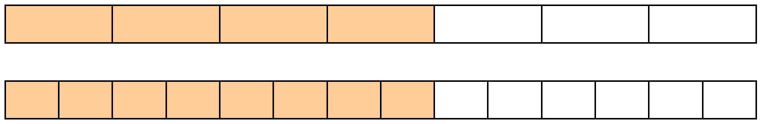
- Para calcular una cantidad cuya fracción conocemos, dividimos ésta por el numerador y el resultado lo multiplicamos por el denominador.

  Hemos gastado 350 € y esta cantidad representa los 5/7 del total de dinero que teníamos. ¿Qué cantidad llevábamos?

  350 : 5 = 70 70 x7 = **490 €**

FRACCIONES EQUIVALENTES

Definición: Dos fracciones son **equivalentes** cuando representan la misma parte de la unidad.



4/7

8/14

Observa que 4/7 y 8/14 son fracciones diferentes que representan la misma parte de la unidad. Por ello, podemos escribir:

$$4/7 = 8/14$$

Propiedad fundamental: Dos fracciones son equivalentes si se verifica que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda es igual al producto del numerador de la segunda por el denominador de la primera (productos cruzados).

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} \longrightarrow 4 \text{ x } 14 = 8 \text{ x } 7 = 56$$

Obtención de fracciones equivalentes:

- Por **amplificación**: Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente a la primera.

$$\frac{3 \xrightarrow{x\,4}}{7 \xrightarrow{x\,4}} = \frac{12}{28} \qquad \frac{3 \xrightarrow{x\,9}}{7 \xrightarrow{x\,9}} = \frac{27}{63}$$

- Por **simplificación**: Si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente a la primera.

$$\frac{24 \xrightarrow{:3}}{54 \xrightarrow{:3}} = \frac{8}{18} \qquad \frac{24 \xrightarrow{:6}}{54 \xrightarrow{:6}} = \frac{4}{9}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Definición: simplificar una fracción **es** obtener **otra fracción equivalente** cuyos términos sean menores que los dados. Para ello se divide el numerador y el denominador por un mismo número que sea divisor de ambos.

$$\frac{30}{60} = \frac{30:6}{60:6} = \frac{5}{10}$$

Fracción irreducible: aquella fracción que no se puede simplificar, es decir, aquella en que el numerador y el denominador son primos entre sí (no tienen ningún divisor en común).

$$\frac{24}{36} = \frac{24:2}{36:2} = \frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$$

Métodos para hallar la fracción irreducible:

Podemos utilizar dos métodos: el de las divisiones sucesivas y el del máximo común divisor.

- **Divisiones sucesivas**: dividimos sucesivamente los dos términos de la fracción hasta obtener la fracción irreducible.

$$\frac{30}{40} = \frac{30:2}{40:2} = \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{30}{40} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

- **Máximo común divisor**: calculamos el M.C.D. de los términos de la fracción y dividimos ambos términos por él. De este modo se obtiene directamente la fracción irreducible.

M.C.D. (30, 40) = 2 x 5 = 10

$$\frac{30}{40} = \frac{30:10}{40:10} = \frac{3}{4}$$

$30 = 2 \times 3 \times 5$
$40 = 2^3 \times 5$

M.C.D. = 2 x 5 = 10 (Comunes con el menor exponente)

REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Definición: es el proceso por el cual transformamos dos o más fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador. Hay dos métodos: productos cruzados y mínimo común múltiplo (M.C.M.).

$$\frac{7}{8}, \frac{5}{12}, \frac{2}{3} = \frac{21}{24}, \frac{10}{24}, \frac{16}{24}$$

Método de los productos cruzados:

Consiste en multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por los denominadores de los demás.

$$\frac{7}{8}, \frac{5}{12}, \frac{2}{3} = \frac{7 \times 12 \times 3}{8 \times 12 \times 3}, \frac{5 \times 8 \times 3}{12 \times 8 \times 3}, \frac{2 \times 8 \times 12}{3 \times 8 \times 12} = \frac{252}{288}, \frac{120}{288}, \frac{192}{288} = \frac{21}{24}, \frac{10}{24}, \frac{16}{24}$$

Con este método al final tenemos que hallar el mínimo común denominador, por eso hemos dividido las tres fracciones resultantes entre 12.

Método del mínimo común múltiplo:

Consiste en escribir como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Se actúa así:

1. Se simplifican las fracciones dadas, si se puede.
2. Se halla el m.c.m. de los denominadores.
3. Se coloca el m.c.m. como denominador común.
4. Para hallar cada numerador se divide el m.c.m. por su denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Ejemplo:

Reducir a común denominador: $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$ y $\frac{2}{3}$

Como no podemos simplificar pasamos directamente al m.c.m.

$8 = 2^3$
$12 = 2^2 \text{ x } 3$
$3 = 3$

m.c.m $= 2^3 \text{ x } 3 = 24$ (factores comunes y no comunes con el mayor exponente)

$$\frac{7}{8} , \frac{5}{12} , \frac{2}{3} = \frac{(24:8)\text{x }7}{24} , \frac{(24:12)\text{x }5}{24} , \frac{(24:3)\text{x }2}{24} = \frac{21}{24} , \frac{10}{24} , \frac{16}{24}$$

COMPARACIÓN Y ORDENACIÓN DE FRACCIONES

- Dadas dos o más fracciones que tienen el **mismo denominador**, es **mayor** la que tiene **mayor numerador**.

$$\frac{8}{12} , \frac{12}{12} , \frac{1}{12} , \frac{20}{12} \Rightarrow \frac{20}{12} \rangle \frac{12}{12} \rangle \frac{8}{12} \rangle \frac{1}{12}$$

- Dadas dos o más fracciones que tienen el **mismo numerador**, es **mayor** la que tiene el **denominador menor**.

$$\frac{15}{4} , \frac{15}{25} , \frac{15}{15} , \frac{15}{10} \Rightarrow \frac{15}{4} \rangle \frac{15}{10} \rangle \frac{15}{15} \rangle \frac{15}{24}$$

- Para comparar fracciones de **distinto denominador** y numerador se reducen a común denominador y es mayor la que tiene mayor numerador

$$\frac{7}{8} , \frac{5}{12} , \frac{2}{3} = \frac{21}{24} , \frac{10}{24} , \frac{16}{24} \Rightarrow \frac{21}{24} \rangle \frac{16}{24} \rangle \frac{10}{24}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA DE FRACCIONES

- Con **igual denominador**: La suma de fracciones con el mismo denominador es otra fracción de igual denominador cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones dadas.

$$\frac{5}{18} + \frac{3}{18} + \frac{7}{18} = \frac{5+3+7}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

El **resultado** debe darse **siempre** mediante una **fracción irreducible**.

- Con **distinto denominador**:
  1. Se reducen las fracciones a común denominador.
  2. Se continúa como en el caso anterior (igual denominador): sumamos los numeradores y dejamos el mismo denominador.

$$\frac{2}{8} + \frac{6}{12} + \frac{2}{3} = \frac{6}{24} + \frac{12}{24} + \frac{16}{24} = \frac{6 + 12 + 16}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

Pasos:

a) Común denominador: m.c.m (8, 12, 3) = 24

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \times 3$

$3 = 3$

Comunes y no comunes con el mayor exponente

m.c.m. = $2^3 \times 3 = 24$

b) Para hallar cada numerador se divide el m.c.m. por su denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

$$\frac{2}{8} + \frac{6}{12} + \frac{2}{3} = \frac{(24:8) \times 2}{24} + \frac{(24:12) \times 6}{24} + \frac{(24:3) \times 2}{24} = \frac{6}{24} + \frac{12}{24} + \frac{16}{24}$$

c) Se deja el mismo denominador y en el numerador la suma de los numeradores.

$$\frac{2}{8} + \frac{6}{12} + \frac{2}{3} = \frac{6}{24} + \frac{12}{24} + \frac{16}{24} = \frac{6+12+16}{24} = \frac{34}{24}$$

d) Si se puede: se simplifica y se convierte en fracción mixta

$$\frac{2}{8} + \frac{6}{12} + \frac{2}{3} = \frac{6}{24} + \frac{12}{24} + \frac{16}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

RESTA DE FRACCIONES

- Con **igual denominador**: La resta de fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es igual a la diferencia de los numeradores de las fracciones dadas.

$$\frac{15}{18} - \frac{3}{18} - \frac{6}{18} = \frac{15-3-6}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

El **resultado** debe darse **siempre** mediante una **fracción irreducible**.

- Con **distinto denominador**:
  1. Se reducen las fracciones a común denominador.
  2. Se continúa como en el caso anterior (igual denominador): restamos los numeradores y dejamos el mismo denominador.

$$\frac{10}{12} - \frac{4}{6} = \frac{10}{12} - \frac{8}{12} = \frac{10-8}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Pasos:

a) Común denominador: m.c.m (12, 6) = 12

$12 = 2^2 \text{ x } 3$ | Comunes y no comunes con el mayor exponente

$6 = 2 \text{ x } 3$ | $\text{m.c.m.} = 2^2 \text{ x } 3 = 12$

b) Para hallar cada numerador se divide el m.c.m. por su denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

$$\frac{10}{12} - \frac{4}{6} = \frac{(12:12)\text{ x } 10}{12} - \frac{(12:6)\text{ x } 4}{12} = \frac{10}{12} - \frac{8}{12}$$

c) Se deja el mismo denominador y en el numerador la resta de los numeradores.

$$\frac{10}{12} - \frac{4}{6} = \frac{10}{12} - \frac{8}{12} = \frac{10 - 8}{12} = \frac{2}{12}$$

d) Si se puede: se simplifica y se convierte en fracción mixta

$$\frac{10}{12} - \frac{4}{6} = \frac{10}{12} - \frac{8}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

PRODUCTO DE FRACCIONES

- Un **número natural por una fracción**: es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es el producto del número natural por el numerador de la fracción.

$$4 \text{ x } \frac{7}{12} = \frac{4 \text{ x } 7}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2\ \frac{1}{3}$$

Si se puede: se **simplifica** y se convierte en fracción **mixta**

- Producto de **varias fracciones**: es otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores.

$$\frac{5}{10} \text{ x } \frac{4}{6} \text{ x } \frac{6}{3} = \frac{5 \text{ x } 4 \text{ x } 6}{10 \text{ x } 6 \text{ x } 3} = \frac{120}{180} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Si se puede: se **simplifica** y se convierte en fracción **mixta**

COCIENTE DE FRACCIONES

- Cociente de **dos fracciones**: es otra fracción cuyo numerador es igual al producto del primer numerador por el segundo denominador y cuyo denominador es igual al producto del primer denominador por el segundo numerador. Productos cruzados.

$$\frac{12}{20} : \frac{4}{5} = \frac{12 \text{ x } 5}{20 \text{ x } 4} = \frac{100}{80} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\ \frac{1}{4}$$

- Cociente de **varias fracciones**: es otra fracción cuyo numerador es igual al producto del primer numerador por el segundo y tercer denominador y cuyo denominador es igual al producto del primer denominador por el segundo y tercer numerador.

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5 \text{ x } 4 \text{ x } 5}{8 \text{ x } 2 \text{ x } 1} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6\ \frac{1}{4}$$

- Cociente de una **fracción** entre un **número natural** o a la inversa: se considera que el número natural tiene como denominador la unidad y se divide como los casos anteriores.

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} : \frac{3}{1} = \frac{4 \text{ x } 1}{5 \text{ x } 3} = \frac{4}{15}$$

$$4 : \frac{3}{8} = \frac{4}{1} : \frac{3}{8} = \frac{4 \text{ x } 8}{1 \text{ x } 3} = \frac{32}{3} = 10\ \frac{2}{3}$$

Si se puede: se **simplifica** y se convierte en fracción **mixta**

OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES

En una serie de operaciones combinadas con fracciones, se efectúan **primero** las 26perariones indicadas entre **paréntesis**, después los productos y divisiones y, finalmente, las sumas y las restas en el orden en que aparecen.

• Ejercicio: $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \text{ x } \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

Primero resolvemos el paréntesis:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

Segundo: la multiplicación

$$\frac{17}{12} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

Por **último**: la resta

$$\frac{17}{36} - \frac{1}{5} = \frac{85}{180} - \frac{36}{180} = \frac{49}{180}$$

• Ejercicio: $\frac{22}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{6}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}$

Primero resolvemos las multiplicaciones:

$\frac{22}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}$ $\frac{6}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

A continuación: la resta

$\frac{11}{10} - \frac{3}{5} - \frac{4}{15} = \frac{33}{30} - \frac{18}{30} - \frac{8}{30} = \frac{7}{30}$

NÚMEROS DECIMALES

Los números decimales nacen como una forma especial de escritura de las fracciones decimales, de manera que la coma separa la parte entera de la parte decimal. Si no hay enteros, colocamos 0 delante de la coma.

Fracción decimal es toda fracción que tiene por numerador un número entero cualquiera y por denominador la unidad seguida de ceros.

Número decimal es toda fracción decimal escrita en el sistema de base diez. Tiene dos partes: la parte entera a la izquierda de la coma y la parte decimal a la derecha de la coma.

$$\frac{3}{10} \downarrow 0{,}3 \qquad \frac{8.743}{1.000} \downarrow 8{,}743 \qquad \frac{57}{100} \downarrow 0{,}57 \qquad \frac{3.278}{1.000.000} \downarrow 0{,}003278$$

La diferencia, pues, entre fracciones decimales y números decimales está en la forma de escribir dichos números.

Las fracciones decimales que tienen por numerador la unidad se llaman **unidades decimales:**

Unidad decimal	Número decimal	Lectura unidades decimales
1/10	0,1	Una décima
1/100	0,01	Una centésima
1/1000	0,001	Una milésima
1/10000	0,0001	Una diezmilésima
1/100000	0,00001	Una cienmilésima
1/1000000	0,000001	Una millonésima
1/10000000	0,0000001	Una diezmillonésima

Para **leer un número decimal**, primero se lee la parte entera y después la parte decimal como si fuera entera, indicando la unidad decimal que corresponde a la última cifra decimal.

28,64 = veintiocho enteros, sesenta y cuatro centésimas.

0,045 = cero enteros, cuarenta y cinco milésimas = cuarenta y cinco milésimas.

2,0436 = dos enteros, cuatrocientas treinta y seis diezmilésimas.

125,6 = ciento veinticinco enteros, seis décimas.

PARTE ENTERA **PARTE DECIMAL**

____ ____ , ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ **orden**

1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º 8º 9º **decimal**

Unidad

Milmillonésima

Decena

Cienmillonésima

Diezmillonésima: 0,0000001

Millonésima: 0,000001 $\longrightarrow \dfrac{1}{1000000}$

Cienmilésima: 0,00001 $\longrightarrow \dfrac{1}{100000}$

Diezmilésima: 0,0001 $\longrightarrow \dfrac{1}{10000}$

Milésima: 0,001 $\longrightarrow \dfrac{1}{1000}$

Centésima: 0,01 $\longrightarrow \dfrac{1}{100}$

Décima: 0,1 $\longrightarrow \dfrac{1}{10}$

Cómo se escribe una fracción decimal en forma de número decimal

Para escribir en forma de número decimal una fracción decimal, se escribe sólo el numerador y se separan con una coma, a partir de la derecha, tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.

$$\frac{5}{100} = 0{,}05 \quad ---- \quad \frac{1256}{1000} = 1{,}256 \quad ---- \quad \frac{75}{10000} = 0{,}0075$$

Cómo se escribe un número decimal en forma de fracción decimal

Para escribir un número decimal en forma de fracción decimal se escribe en el numerador el número sin coma, y por denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

$$4{,}3 = \frac{43}{10} \quad ---- \quad 0{,}058 = \frac{58}{1000} \quad ---- \quad 3{,}4075 = \frac{34075}{10000}$$

Ordenación de los números decimales

Para ordenar dos números decimales nos fijamos primero en su parte entera

5,7436 --- 10,98 → como 10 > 5 se tiene 10,98 > 5,7436

Si tienen la misma parte entera: 3,125 --- 3,8 --- 3,199

- Nos fijamos en la cifra de las décimas: 8 > 1 → 3,8 > 3,125 y 3,199
- Para ordenar los números con el mismo número de décimas, nos fijamos en las centésimas:

  9 > 2 → 3,199 > 3,125
- Si hubiese coincidencia en las cifras de las centésimas, deberíamos fijarnos en la de las milésimas, y así sucesivamente.

  3,8 > 3,199 > 3,125

Ejemplo: 7,05 - 9,1 - 7,049 - 9,056 - 9, 2 - 10,52

10,52 > 9,2 > 9,1 > 9,056 > 7,05 > 7,049

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

Suma de números decimales

Para sumar números decimales, se procede del siguiente modo:

- Primero se colocan los números en columnas de manera que se correspondan las unidades del mismo orden.
- Después se suman como si fuesen números naturales y se pone la coma en el resultado bajo la columna de las comas.

3,06 + 4,8 + 6,125 = 13,985

```
  3,06
  4,8
  6,125
 -------
 13,985
```

Resta de números decimales

Para restar números decimales, se procede del siguiente modo:

- Primero se escriben el minuendo y el sustraendo de modo que se correspondan las comas y las cifras de cada orden. Si los números no tienen igual número de cifras decimales, se completan con ceros las cifras que falten.
- Después se restan como si fuesen números naturales y se pone la coma en el resultado bajo la columna de las comas.

8,6 - 3,25 = 5,35 9 - 2,36 = 6,64

```
  8 , 6          9 , 0 0
- 3 , 2 5      - 2 , 3 6
---------      ---------
  5 , 3 5        6 , 6 4
```

Multiplicación de números decimales

1 – **Número decimal por un número natural**

Para multiplicar un número decimal por un número natural, se efectúa la operación como si fueran números naturales y del producto se separan tantas cifras como cifras decimales tenga el número decimal.

5,72 x 8 = 45,76 0,0425 x 5 = 0,2125

2 – **Multiplicación de dos números decimales**

Para multiplicar dos números decimales, se efectúa la operación como si fueran números naturales y del producto se separan tantas cifras como cifras decimales tengan entre los dos números decimales.

5,25 x 3,2 = 16,800 4,2 x 0,035 = 0,1470

3 – **Número decimal por la unidad seguida de ceros**

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad, añadiendo ceros a la derecha si fuera necesario.

0,32 x 10 = 3,2 3,68 x 100 = 368

0,32 x 100 = 32 42,07 x 1000 = 42.070

0,32 x 1000 = 320 2,6 x 10.000 = 26.000

4 – **Número natural por la unidad seguida de ceros**

Para multiplicar un número natural por la unidad seguida de ceros, se escribe el número natural y a su derecha se añaden tantos ceros como ceros sigan a la unidad.

25 x 100 = 2.500 179 x 1000 = 179.000

4 x 10.000 = 40.000 95 x 1.000.000 = 95.000.000

5 – **Número decimal (o natural) por una unidad decimal**

Para multiplicar un número decimal (o natural) por una unidad decimal, se divide el número decimal (o natural) entre el inverso de la unidad decimal.

- 45,34 x 0,001 = 45,34 : 1000 = 0,04534
- 258 x 0,00001 = 258 : 100.000 = 0,00258

División de números decimales

1 – **Número natural entre la unidad seguida de ceros**

Para dividir un número natural entre la unidad seguida de ceros, se separan con una coma, a partir de la derecha, tantos lugares como ceros tenga la unidad.

25 : 100 = 0,25 179 : 1000 = 0,179

4 : 10.000 = 0,0004 12.685 : 10.000 = 1,2685

2 – **Número decimal entre la unidad seguida de ceros**

Para dividir un número decimal entre la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad.

34,2 : 10 = 3,42 3,68 : 100 = 0,0368

0,32 : 100 = 0,0032 42,07 x 10.000 = 0,004207

1.354,25 : 1000 = 1,35425 2,6 x 100.000 = 0,000026

3 – **Número decimal (o natural) entre una unidad decimal**

Para dividir un número decimal (o natural) entre una unidad decimal, se multiplica el número decimal (o natural) por el inverso de la unidad decimal.

- 45,34 : 0,001 = 45,34 x 1000 = 45.340
- 258 : 0,00001 = 258 x 100.000 = 25.800.000

4 – **Número natural entre un número decimal**

Para dividir un número natural entre un número decimal, se suprime la coma del divisor y a la derecha del dividendo se ponen tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. Después se hace la división como si fuesen números naturales.

1.245 : 2,25 = 124.500 : 225 = 553

170 : 0,428 = 170.000 : 428 = 397

5 – **Número decimal entre un número natural**

Para dividir un número decimal entre un número natural, se efectúa la operación como si fueran números naturales, pero se pone una coma en el cociente al bajar la primera cifra decimal.

17,72 : 8 = 2,21 0,0425 : 5 = 0,0085

6 – **División de dos números decimales**

Para dividir dos números decimales, se suprime la coma del divisor y se desplaza la coma del dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tenga el divisor.

5,25 : 3,2 = 52,5 : 32 = 1,6

4,2 : 0,035 = 4.200 : 35 = 120

La potencia de un número decimal

Para calcular la potencia de base decimal se calcula como si la base fuese un número natural y del resultado se separan tantas cifras decimales como indique el producto del exponente por el número de cifras decimales de la base.

$0{,}5^2 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

$1{,}2^3 = 1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}728$

$0{,}5^3 = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$

$0{,}15^2 = 0{,}15 \times 0{,}15 = 0{,}0225$

Operaciones combinadas con números decimales

Al operar con números decimales nos encontramos que muchas veces debemos realizar más de una operación. En estos casos debemos hacer:

- Primero, efectuamos las operaciones de los paréntesis si los hay.
- A continuación, realizamos las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Por último, las sumas o restas, también en el orden en que aparecen.

Si aparecen paréntesis y corchetes, recuerda que debes efectuar primero los paréntesis que se encuentran en el interior.

Observa estos ejemplos:

a) 2,5 x 4,9 + 8,6 – 4 x 2,5 = 12,25 + 8,6 – 10 = 10,85

b) 15,9 – 3,7 x (3,6 – 1,8) – 2,5 x 0,5 = 15,9 – 3,7 x 1,8 – 2,5 x 0,5 = 15,9 – 6,66 – 1,25 = 7,99

c) 1,5 x [(7,2 – 3,5 x 2) – 0,15] = 1,5 x [(7,2 – 7) – 0,15] = 1,5 x [0,2 – 0,15] =1,5 x 0,05 = 0,075

PROPORCIONALIDAD

Se llama **razón de dos números** al cociente indicado de dichos números (No hay que confundir razón con fracción)

Ejemplos: 3 / 5; 0,2 / 5; 4 / 2,5; 0,6 / 2

En una fracción sus términos nunca pueden ser decimales.

Los términos de una razón se llaman **antecedente** y **consecuente**
Para representar de forma general una razón la escribimos: **a / b** siendo **a el antecedente** y **b el consecuente.**
Como una razón es una división, el dividendo es el antecedente y el divisor el consecuente. El resultado de la división del antecedente entre el consecuente es la **constante de proporcionalidad.**

La igualdad de dos razones se llama **proporción**. Si a / b y c / d son dos razones, las escribimos en forma de proporción:

$$a / b = c / d$$

Los números **a** y **d** se llaman **extremos** y **b** y **c** **medios** y son los términos de una proporción.

Propiedades de las proporciones:

En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

LOS NÚMEROS ENTEROS

Número Entero

Un número entero es un número natural precedido del signo más (+) o del signo menos (-)

- Los números enteros con el signo + se llaman **números enteros positivos**.
- Los números enteros con el signo - se llaman **números enteros negativos**.

Valor absoluto de un número entero:

El valor **absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de prescindir del signo.
Ejemplo:

El valor absoluto de +10 es 10. Y se escribe así: $|+10| = 10$

Los signos + y - que llevan los números enteros no deben confundirse con los de sumar y restar, ya que simplemente indican si son positivos o negativos.

Suma de números enteros:

Se presentan varios casos:

1. Suma de números enteros positivos: (+3) + (+5) + (+8) = (+16)

Se suman los valores absolutos de los números. Al resultado se le pone el signo positivo.

2. Suma de números enteros negativos: (-3) + (-5) + (-8) = (-16)

Se suman los valores absolutos de los números. Al resultado se le pone el signo negativo.

3. Suma de dos números enteros de distinto signo:

(+8) + (-5) = (+3) ; (-8) + (+5) = (-3)

El resultado se obtiene restando los valores absolutos. El signo será el que tenga el número de mayor valor absoluto.

4. Suma de varios enteros de distintos signos:

Se opera del siguiente modo:

a) Se suman los números que tienen el mismo signo. Los positivos por un lado y los negativos por otro.
b) Se restan los valores absolutos de los resultados obtenidos y se coloca el signo mayor.

(+4) + (-3) + (-8) + (+2) = (4 + 2) + (-3 -8) = (+6) + (-11) = -5

Resta de números enteros:

Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.

Ejemplos:

(+3) - (+2) = (+3) + (-2) = (+1) (+3) - (-5) = (+3) + (+5) = (+8)

Cálculo con paréntesis

Distinguiremos dos casos:

a) **Cuando el paréntesis va precedido del signo menos (-)**

7 - (5 - 3) =

- **Primera forma**:

  Se hace la operación del interior del paréntesis y se resta seguidamente.

  7 - (5 - 3) = 7 - 2 = 5

- **Segunda forma**:

  Se suprime el paréntesis cambiando todos los signos del interior.

  7 - (5 - 3) = 7 - 5 + 3 = 5

b) **Cuando el paréntesis va precedido del signo (+)**

6 + (-5 + 2) =

- **Primera forma**:

  Se hace la operación del interior del paréntesis y se suma a continuación

  6 + (-5 + 2) = 6 + (-3) = 6 - 3 = 3

- **Segunda forma**:

  Se suprime el paréntesis dejando las sumas del interior con sus signos.

  6 + (-5 + 2) = 6 - 5 + 2 = 8 - 5 = 3

Cálculo con corchetes

Los corchetes son paréntesis que tienen esta forma [ ]. Se utilizan cuando en una expresión hay más de un paréntesis.

Veamos dos formas de calcular

Primera forma:

1. Se hace primero la operación del interior del paréntesis.
2. Después se hace la operación del interior del corchete.

3 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 = 3 - [6 - (-1) - 2] + 1 =

3 - [6 + 1 - 2] + 1 = 3 - 5 + 1 = -1

Segunda forma:

1. Se suprime en primer lugar el paréntesis.
2. Después se suprime el corchete.

3 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 = 3 - [6 + 5 - 4 - 2] + 1 =

3 - 6 - 5 + 4 + 2 + 1 = (3 + 4 + 2 + 1) - (6 + 5) = 10 - 11 = -1

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Magnitudes

Frecuentemente utilizamos expresiones como:

- La distancia de Zaragoza a Barcelona es de 300 km.
- Voy a comprar 3 kg de manzanas.
- Este depósito tiene una capacidad de 500 litros.
- Antonio tarda 15 min. en ir de su casa al colegio.

La longitud, la masa, la capacidad y el tiempo son ejemplos de propiedades que se pueden medir. Otras propiedades, como el estado de ánimo, el color, la belleza… no son medibles.

La longitud, la masa, la capacidad y el tiempo son ejemplos de **magnitudes**.

Magnitud es toda característica capaz de ser medida.

Unidades y patrones

Una medida es el resultado de comparar el objeto de la medición con una cantidad considerada como unidad. Así, cuando decimos que la longitud de la mesa es de 4 palmos y medio, estamos comparando la longitud de la mesa con la de nuestro palmo.

Desde la antigüedad, los distintos pueblos, obligados por las necesidades comerciales, adoptaron distintas **unidades** de medida para medir las diferentes magnitudes. Las primeras unidades de medida elegidas estuvieron relacionadas con algunas de las partes del cuerpo humano y no eran muy adecuadas porque varían de una persona a otra. Por ello, el ser humano se planteó la necesidad de buscar unidades que fueran invariables, así surgieron las unidades **patrón**.

Pero, aún así, éstas tomaban valores diferentes según la zona.

Las **primeras unidades** de longitud:

- **Codo**: era la longitud del antebrazo, desde la parte saliente del codo hasta la extremidad del dedo medio extendido.
- **Palmo mayor**: equivalía al ancho de la mano extendida entre el dedo pulgar y el meñique.
- **Palmo menor**: ancho de la mano con los dedos unidos, excluidos el pulgar.
- **Pie**: igual a la longitud de un pie.
- **Paso**: equivale a un paso largo.
- **Pulgada**: equivalente al ancho del dedo pulgar.
- **Brazada**: equivale a la distancia existente entre los extremos de los dedos de cada mano con los brazos extendidos.

Más tarde se comenzaron a utilizar distintas **medidas tradicionales**:

	Unidades	Equivalencias (desde… hasta…)	Se utilizaba en…
LONGITUD	Pie	0,259 m hasta 0,302 m	Baleares, Cataluña, Castilla, Valencia…
	Vara	0,772 m hasta 0,839 m	En toda España.
	Legua	5.196 m	En toda España.
MASA	Arroba	11,5 kg hasta 12,5 kg	Castilla, Galicia, Aragón…
	Libra	372 g hasta 579 g	Casi toda España.
	Onza	23 g hasta 37 g (la diecisei-sava parte de una libra)	Casi toda España.
CAPACIDAD	Azumbre	0,66 l. hasta 2,016 l.	Castilla, Galicia, Vizcaya…
	Cántara	Aprox. 16,13 l.	En toda España
	Cañado	32 l. a 37 l.	Galicia…
	Fanega	10 l. hasta 55,5 l.	En toda España, excepto Galicia, León y Navarra.
	Carga	121,6 l. hasta 222 l. (os-cila entre 3 y 4 fanegas)	En toda España, excepto Galicia, León y Navarra.
	Pinta	0,735 l. hasta 0,808 l.	Aragón, Navarra…

Para evitar confusiones y unificar criterios, los científicos del siglo XVIII se reunieron con el objetivo de establecer un sistema de unidades de carácter universal. De este modo nació el Sistema Métrico Decimal (SMD).

En España, se adoptó el Sistema Métrico Decimal en 1892. Las copias de los patrones entregados a España se guardan en el Instituto Geográfico de Madrid.

Desde la implantación del Sistema Métrico Decimal, los sistemas de medida utilizados anteriormente en los distintos países han ido desapareciendo. El que ha permanecido durante más tiempo ha siso el **sistema anglosajón**, utilizado en la mayoría de los países de habla inglesa (recientemente, en Gran Bretaña ya se ha implantado el SMD)

	Unidades	Equivalencia en el Sistema anglosajón	Equivalencia en el SMD
LONGITUD	Pulgada	----	2,54 cm
	Pie	12 pulgadas	30,48 cm.
	Yarda	3 pies	91,44 cm
	Braza	2 yardas	1,829 m
	Milla terrestre	1.760 yardas	1,609 km
	Milla marina	6.080 pies	1,853 km

UNIDADES DE MEDIDA

Unidades de longitud

Múltiplos del metro | **Unidad principal** | **Submúltiplos del metro**

Miriámetro	Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
Mam 10.000 m	Km 1.000 m	Hm 100 m	Dam 10 m	M	Dm 0,1 m	Cm 0,01 m	Mm 0,001 m

x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10

Mam ---- Km ---- Hm ---- Dam ---- m ---- dm ---- cm ---- mm

: 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10

Unidades de capacidad

Múltiplos del litro | Unidad principal | Submúltiplos del litro

Mirialitro	kilolitro	Hectolitro	Decalitro	Litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
Mal 10.000 l.	Kl 1.000 l.	Hl 100 l.	Dal 10 l.	L	Dl 0,1 l.	Cl 0,01 l.	Ml 0,001 l.

x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10

Mal ----- Kl ------ Hl ----- Dal ----- l ------ dl ------ cl ----- ml

: 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10

Unidades de masa

Múltiplos del Kg		Múltiplos del gramo				Unidad principal	Submúltiplos del gramo		
Toneladas	**Quintales**	**Miriagramo**	**kilogramo**	**Hectogramo**	**Decagramo**	**Gramo**	**Decigramo**	**Centigramo**	**Miligramo**
Tm 1.000 kg	Qm 100 kg	Mag 10.000 g	Kg 1.000 g	Hg 100 g	Dag 10 g	G	Dg 0,1 g	Cg 0,01 g	Mg 0,001 g

x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10

Tm ----- Qm ---- Mag ---- Kg ------ Hg ----- Dag ----- g ----- dg ----- cg ----- mg

: 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10

Unidades de superficie

Múltiplos del metro cuadrado				Unidad principal	Submúltiplos del metro cuadrado		
Miriámetro cuadrado	**Kilómetro cuadrado**	**Hectómetro cuadrado**	**Decámetro cuadrado**	**Metro cuadrado**	**Decímetro cuadrado**	**Centímetro cuadrado**	**Milímetro cuadrado**
Mam^2 100.000.000 m^2	Km^2 1.000.000 m^2	Hm^2 10.000 m^2 “ha”	Dam^2 100 m^2 “a”	M^2 “ca”	Dm^2 0,01 m^2	Cm2 0,0001 m^2	Mm^2 0,000001 m^2
		hectáreas	áreas	centiáreas			

x 100 x 100 x 100 x 100 x 100 x 100 x 100

Mam^2 ---- Km^2 ---- Hm^2 ---- Dam^2 ---- m^2 ------ dm^2 ---- cm^2 ----- mm^2

: 100 : 100 : 100 : 100 : 100 : 100 : 100

Unidades de volumen

Múltiplos del metro cúbico — **Unidad principal** — Submúltiplos del metro cúbico

Miriámetro cúbico	**Kilómetro cúbico**	**Hectómetro cúbico**	**Decámetro cúbico**	**Metro cúbico**	**Decímetro cúbico**	**Centímetro cúbico**	**Milímetro cúbico**
Mam^3 1.000.000.000.000 m^3	Km^3 1.000.000.000 m^3	Hm^3 1.000.000 m^3	Dam^3 1.000 m^3	M^3	Dm^3 0,001 m^3	Cm^3 0,000001 m^3	Mm^3 0,000000001 m^3

x 1000 x 1000 x 1000 x 1000 x 1000 x 1000 x 1000

Mam^3 ---- Km^3 ---- Hm^3 ---- Dam^3 ---- m^3 ------ dm^3 ---- cm^3 ----- mm^3

: 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000 : 1000

Correspondencia entre las unidades de volumen, capacidad y masa

Volumen		**Capacidad**		**Masa (peso)**
1 m^3	-------	1 kl	-------	1.000 kg (tonelada métrica)
100 dm^3	-------	1 hl	-------	100 kg (quintal métrico)
10 dm^3	-------	1 dal	-------	10 kg (miriagramo)
1 dm^3	-------	1 l.	-------	1 kg
100 cm^3	-------	1 dl	-------	100 g
10 cm^3	-------	1 cl	-------	10 g
1 cm^3	-------	1 ml	-------	1 g

- **Número complejo**: es el que está expresado en varias unidades.

  Ejemplo: 3 dam, 12 cm, 75 mm --- 75 hl, 4 dal, 34 dl

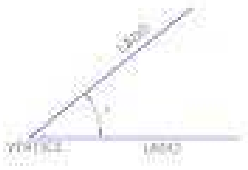
- **Número incomplejo**: es el que está expresado en una sola unidad.

  Ejemplo: 75 mm --- 34 dl --- 1,85 hm^3 --- 125 mag

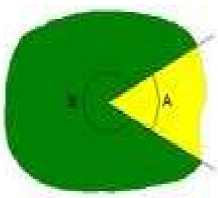
ÁNGULOS

ÁNGULO: Es la parte de plano comprendida entre dos semirrectas que se cortan en un punto.

Elementos de un ángulo: Lados, son las dos semirrectas. Vértice, el punto donde se cortan las semirrectas

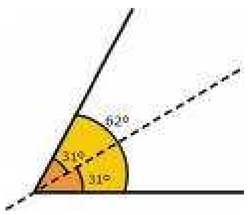


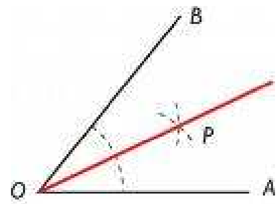
Dos semirrectas con un mismo vértice determinan dos ángulos: **CÓNCAVO** es el que ocupa más de dos regiones angulares. **CONVEXO** el que ocupa menos de dos regiones angulares.

cóncavo  convexo

Bisectriz de un ángulo: Es la semirrecta que partiendo del vértice divide al ángulo en dos partes iguales.

Propiedad de la bisectriz: Cualquier punto de la bisectriz, está a la misma distancia de los lados del ángulo.

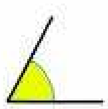




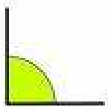
CLASES DE ÁNGULOS POR SU AMPLITUD

Nulo Su amplitud es igual a 0^0

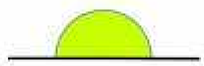
Agudo Es menor que el recto



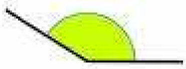
Recto Su amplitud es igual a 90^0



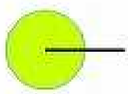
Llano Es igual a dos rectos



Obtuso Es mayor que el recto

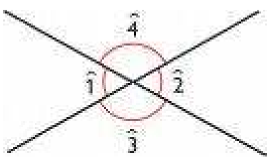


Completo Mide 360^0

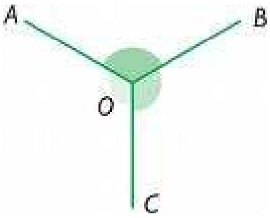


CLASES DE ÁNGULOS

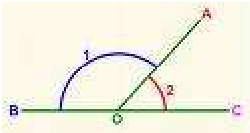
Opuestos por el vértice: Son los ángulos formados por dos rectas secantes que no tienen ningún lado común



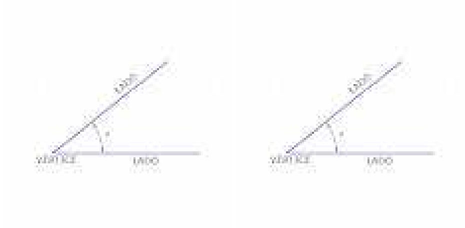
Consecutivos son los que tienen un mismo vértice y un lado en común



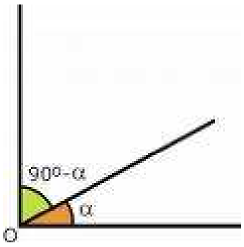
Adyacentes: son los que, además de tener un lado común, los otros dos están en línea recta.



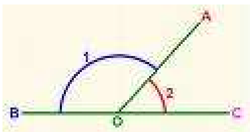
Iguales: Cuando superpuestos coinciden



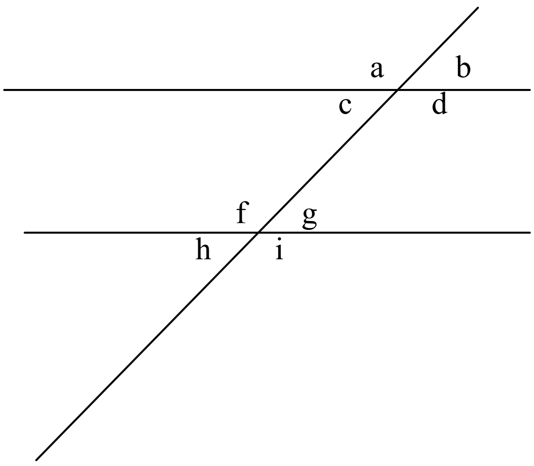
Complementarios: son aquéllos que sumados forman un ángulo recto.



Suplementarios: son aquéllos que sumados forman un ángulo llano.



Ángulos en dos rectas paralelas cortadas por una secante



Correspondientes a = f , c = h, b = g, d = i

Alternos internos c = g, d = f

Alternos externos a = i , b = h

Conjugados internos c y f, d y g
Son suplementarios

Conjugados externos a y h, b e i
Son suplementarios

Opuestos por el vértice a = d, b = c, f = i, g = h

Adyacentes a y b, b y d, d y c, c y a, f y g, g e i, i y h, h y f
Son suplementarios

ELEMENTOS Y FIGURAS EN LA GEOMETRÍA DEL PLANO

Línea recta: sucesión ilimitada de puntos que siguen la misma dirección. No tiene ni principio ni final.

Semirrecta: Cada una de las dos partes en que un punto divide a una recta. Las semirrectas son limitadas por un punto que es el origen de la semirrecta.

Segmento: Es la parte de una recta comprendida entre dos puntos. Los dos puntos se llaman extremos.

Punto: es la intersección de dos rectas.

- Por dos puntos sólo puede pasar una recta.
- Por un punto pasan infinitas rectas.

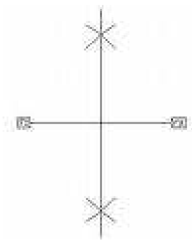
Rectas secantes: son aquellas cuya intersección es un único punto.

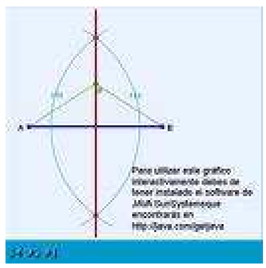
Rectas perpendiculares: son aquellas que se cortan formando cuatro regiones angulares iguales.

Rectas paralelas: son las que por mucho que se prolongan nunca llegan a encontrarse.

Mediatriz de un segmento: es la recta perpendicular en el punto medio del segmento.

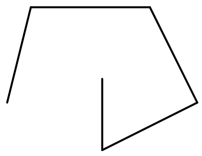
Propiedad de la mediatriz: cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.



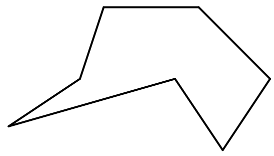


LOS POLÍGONOS

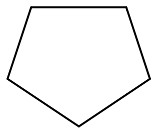
LÍNEA POLIGONAL: Conjunto de segmentos concatenados (unidos por un extremo)



Línea poligonal abierta

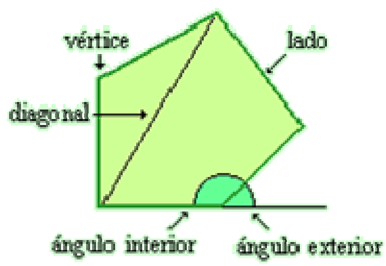


Línea poligonal cerrada



Línea poligonal cerrada

POLÍGONO: Es la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada.



Elementos del polígono:

- **Lados**: son los segmentos que forman la línea poligonal cerrada.
- **Vértices**: son los puntos de unión de los lados.
- **Ángulos**: abertura formada entre dos lados consecutivos.
- **Diagonales**: cada uno de los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

- La **suma** de los **ángulos** de un **polígono** es igual al número de sus lados menos 2, todo ello multiplicado por 180^0.

  Valor de los ángulos = (nº lados – 2) x 180^0

  Pentágono = (5 – 2) x 180^0 = 3 x 180^0 = 540^0.

  Eneágono = (9 – 2) x 180^0 = 7 x 180^0 = 1260^0.

- El **número** de **diagonales** de un **polígono** es igual al número de lados por número de lados menos 3, todo ello dividido por 2.

  Nº de diagonales = nº lados x (nº lados – 3) / 2

  Pentadecágono = 15 x (15 -3) / 2 = 15 x 12 : 2 = 180 : 2 = 90

  Icoságono = 20 x (20 -3) / 2 = 20 x 17 : 2 = 340 : 2 = 170

- Polígonos **equiláteros**: tienen todos sus lados iguales.
- Polígonos **equiángulos**: tienen todos sus ángulos iguales.
- Polígonos **regulares**: tienen todos sus lados y ángulos iguales

En todo polígono regular:

Centro: es el punto equidistante de sus vértices y de sus lados.

Radio: es la distancia del centro a cada uno de los vértices.

Apotema: es el segmento perpendicular que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado.

- **Perímetro** de un polígono: es la suma de las longitudes de todos sus lados.

CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

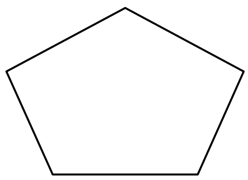
A) Según sus lados:

TRIÁNCULO………….	3 lados	ENEÁGONO…………..	9 lados
CUADRILÁTERO…….	4 lados	DECÁGONO…………..	10 lados
PENTÁGONO…………	5 lados	ENDECÁGONO……….	11 lados
HEXÁGONO………….	6 lados	DODECÁGONO……….	12 lados
HEPTÁGONO…………	7 lados	PENTADECÁGONO….	15 lados
OCTÓGONO………….	8 lados	ICOSÁGONO………….	20 lados

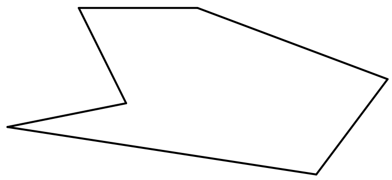
Los demás polígonos se nombran por su número de lados: polígono de 14 lados…

B) Según sus ángulos:

- Polígono **convexo**: si tiene todos sus ángulos convexos (miden menos de 180^0)
- Polígono **cóncavo**: si tiene alguno de sus ángulos cóncavo (mayor de 180^0)



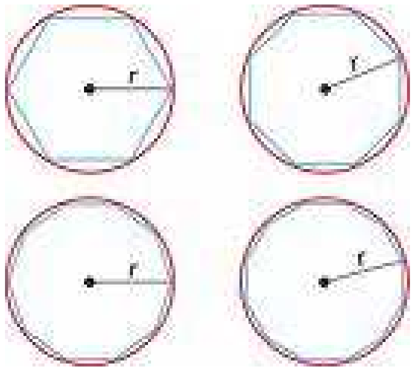
Polígono convexo

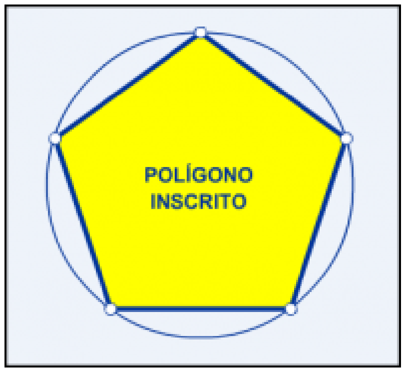


Polígono cóncavo

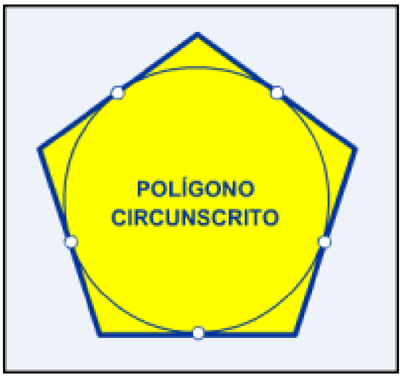
C) Polígonos inscritos y circunscritos:

Inscritos: son los polígonos cuyos vértices son tangentes a la circunferencia.





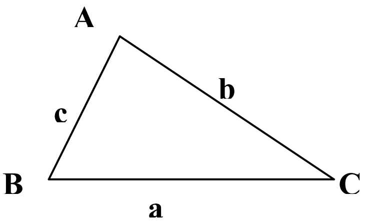
Circunscritos: son los polígonos cuyos lados son tangentes a la circunferencia.



TRIÁNGULOS

TRIÁNGULO: polígono de tres lados con la propiedad de que la longitud de cualquiera de ellos debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

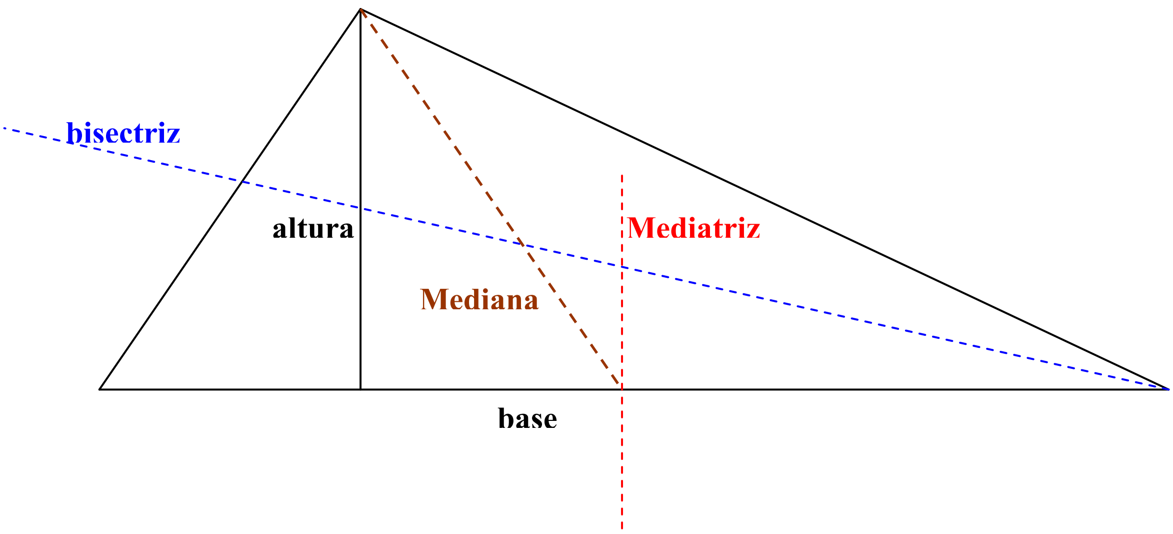
Un triángulo se nombra mediante las tres letras de sus vértices y un pequeño triángulo sobre ellas.



Se escribe: $\overset{\triangle}{ABC}$ Se nombra: triángulo ABC

Cada vértice se nombra con una letra mayúscula. Su lado opuesto se nombra con la misma letra en minúscula.

- **Base**: es uno cualquiera de sus lados.
- **Altura**: distancia perpendicular del vértice a la base o a su prolongación.
- **Mediana**: segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
- **Mediatriz**: es la perpendicular a un lado en su punto medio.
- **Bisectriz**: semirrecta que partiendo del vértice divide a un ángulo en dos partes iguales.



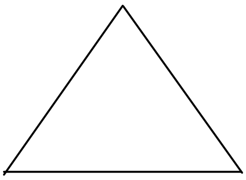
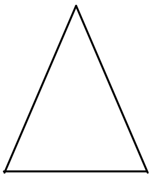
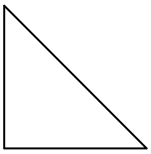
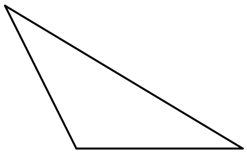
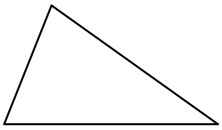
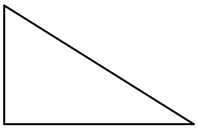
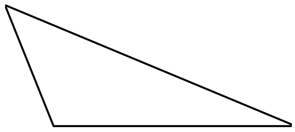
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

20 Por sus **lados**

- Triángulo **equilátero**: los tres lados iguales y también los tres ángulos iguales.
- Triángulo **isósceles**: tiene dos lados iguales. Los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales.
- Triángulo **escaleno**: los tres lados desiguales. También tiene los tres ángulos desiguales.

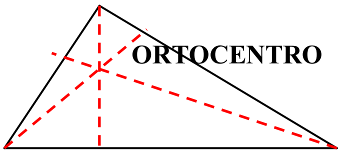
B) Por sus **ángulos**

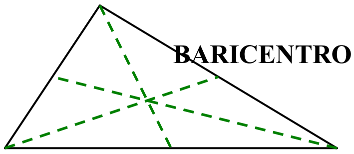
- Triángulo **rectángulo**: tiene un ángulo recto. Los lados menores se llaman **catetos** y el lado mayor **hipotenusa**.
- Triángulo **acutángulo**: tiene los tres ángulos agudos.
- Triángulo **obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso.

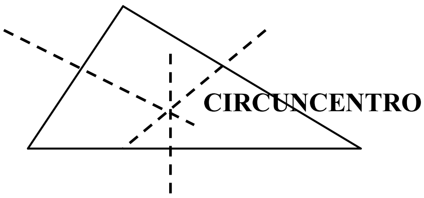
NOMBRE	**ACUTÁNGULO**	**RECTÁNGULO**	**OBTUSÁNGULO**
EQUILÁTERO		No hay	No hay
ISÓSCELES			
ESCALENO			

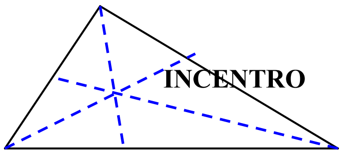
PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

- **ORTOCENTRO**: punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo.
- **BARICENTRO**: punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo.
- **CIRCUNCENTRO**: punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo.
- **INCENTRO**: punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo.







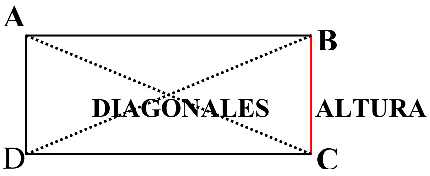


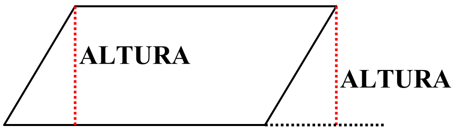
CUADRILÁTEROS

CUADRILÁTERO: Polígono de cuatro lados.

Altura: distancia perpendicular entre los dos lados o a la prolongación de uno de ellos.

La suma de los **cuatro ángulos** del cuadrilátero es igual a **360º**.





CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS: Paralelogramos, trapecios y trapezoides.

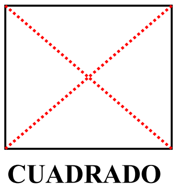
A) PARALELOGRAMOS

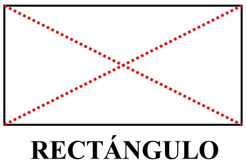
Paralelogramo: cuadrilátero que tiene los cuatro lados paralelos dos a dos.

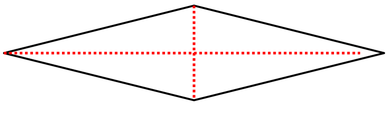
Propiedades del paralelogramo:

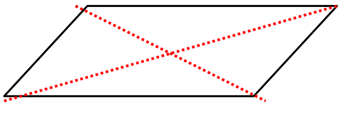
- Cada diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales.
- Los lados opuestos de un paralelogramo tiene igual longitud.
- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y los contiguos son suplementarios.
- Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.

- **CUADRADO**: Paralelogramo que tiene los cuatro lados y los cuatro ángulos iguales (90º). Las diagonales son iguales y perpendiculares.
- **RECTÁNGULO**: Paralelogramo que tiene los lados opuestos iguales dos a dos, sus ángulos iguales (90^0). Las diagonales iguales y no perpendiculares.
- **ROMBO**: Paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y sus ángulos opuestos iguales dos a dos. Las diagonales son desiguales y perpendiculares.
- **ROMBOIDE**: Paralelogramo que tiene los lados opuestos iguales dos a dos y los ángulos también iguales dos a dos. Las diagonales son desiguales y no perpendiculares.


CUADRADO


RECTÁNGULO

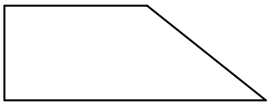

ROMBO


ROMBOIDE

B) TRAPECIOS

Trapecio: Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Los lados paralelos del trapecio se denominan base menor y base mayor.

- Trapecio **rectángulo**: trapecio que tiene dos ángulos rectos.
- Trapecio **isósceles**: trapecio que tiene los lados no paralelos iguales.
- Trapecio **escaleno**: trapecio que tiene los cuatro lados desiguales.



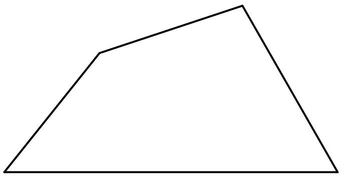
TRAP. RECTÁNGULO

TRAP. ISÓSCELES

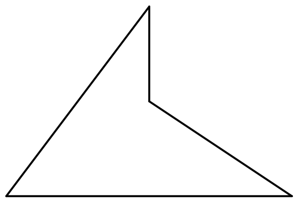
TRAP. ESCALENO

C) TRAPEZOIDES

Trapezoide: Cuadrilátero que no tiene lados paralelos.



TRAPEZOIDE

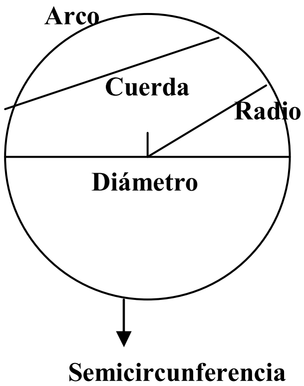


TRAPEZOIDE

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

CIRCUNFERENCIA

Definición: línea curva, plana y cerrada cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

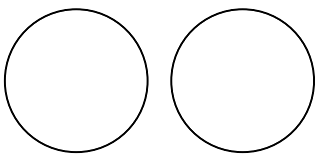


Elementos:

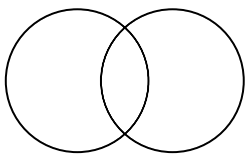
- **Centro**: punto interior del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio**: segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
- **Cuerda**: segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro**: segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. Es la mayor cuerda que se puede trazar a la circunferencia. El diámetro es igual a dos radios.
- **Arco**: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Semicircunferencia**: cada uno de los dos arcos iguales en que un diámetro divide a la circunferencia.

Posiciones relativas de **dos circunferencias**:

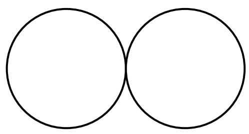
- **Exteriores**: no tiene ningún punto de común.
- **Secantes**: tienen dos puntos en común.
- **Tangentes exteriores**: tiene un solo punto en común y una está fuera de la otra.
- **Tangentes interiores**: tienen un solo punto en común y una está dentro de la otra.
- **Interiores**: No tienen puntos de común, pero una está dentro de la otra.
- **Concéntricas**: Son interiores y además tienen el mismo centro.



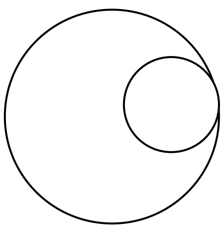
Exteriores



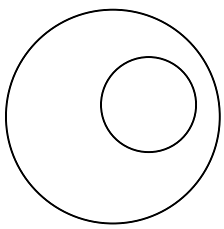
Secantes



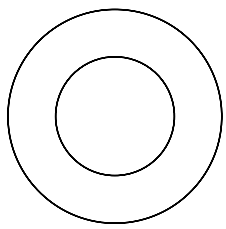
Tangentes exteriores



Tangentes interiores



Interiores



Concéntricas

Longitud de la circunferencia:

Alrededor del siglo XX a. de C., los egipcios determinaron un valor aproximado para el cociente de la longitud de la circunferencia y el diámetro. En nuestros días, gracias a los avances científicos y tecnológicos, se ha logrado determinar dicho valor con gran precisión.

Este cociente lo representamos con la letra griega: π, que se lee pi.

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

Para facilitar los cálculos, sólo emplearemos las dos primeras cifras decimales de este número:

$$\pi = 3{,}14$$

Puesto que el cociente entre la longitud y el diámetro de una circunferencia es π, la longitud de cualquier circunferencia contiene siempre π veces la longitud de su diámetro.

$$\mathrm{L} = \pi \text{ x } \mathrm{d} \qquad \mathrm{L} = 2 \text{ x } \pi \text{ x } \mathrm{r}$$

$$\mathrm{d} = \mathrm{L} : \pi \qquad \mathrm{r} = \mathrm{L} : 2\pi$$

Para hallar la **longitud** de un **arco**:

- Si dividimos la longitud de la circunferencia entre 360^0, obtendremos la longitud de un arco de 1º

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{360^0} = \frac{2\pi\, r}{360^0} = \frac{\pi\, r}{180^0}$$

- Luego para hallar la longitud de un arco correspondiente a un ángulo de nº:

$$\textit{longitud arco} = \frac{\pi \text{ r}}{180^0} \text{ x n}^0$$

CÍRCULO

Definición: porción del plano limitada por una circunferencia

$$\mathrm{A} = \pi \text{ x r}^2 \qquad \mathrm{r} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\pi}}$$

Figuras circulares:

- **Semicírculo**: es la mitad del círculo = $\dfrac{\pi \text{ x r}^2}{2}$
- **Sector circular**: parte del círculo limitada entre dos radios y su arco correspondiente.
- **Cuadrante**: sector circular cuyos radios son perpendiculares

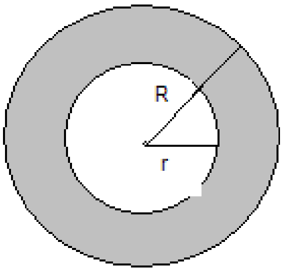
$$\text{Área sector} = \frac{\pi \text{ x r}^2 \text{ x n}^0}{360^0} \qquad \text{Área cuadrante} = \frac{\pi \text{ x r}^2}{4}$$

- **Segmento circular:** parte del círculo limitada entre una cuerda y su arco correspondiente.

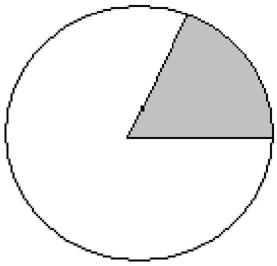
  $$\text{Área segmento} = \frac{\pi\ r^2\ n^0}{360^0} - \frac{b\ .\ a}{2}$$

- **Corona circular:** parte del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.

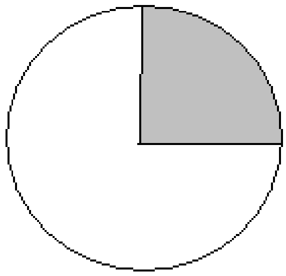
  $$\text{Área corona} = \pi\, R^2 - \pi\, r^2 = \pi\,(R^2 - r^2)$$



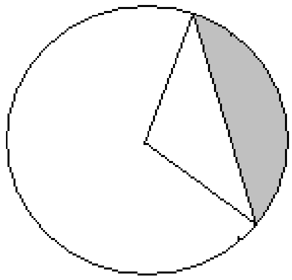
Corona circular



Sector circular



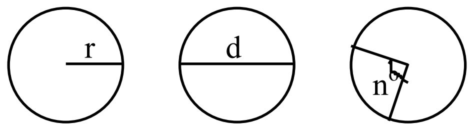
Cuadrante



Segmento circular

FÓRMULAS – FIGURAS PLANAS

L. circunferencia = $2\Pi r = \Pi d$



L. del arco = $\dfrac{2\Pi r \times n^o}{360^o}$

distancia = L x nº vueltas

$r = L : 2\Pi$ $d = L : \Pi$

nº vueltas = distancia : L

L = distancia : nº vueltas

A. cuadrado = $l \times l = l^2$

A. rectángulo = b x a

A. rombo = $\dfrac{D \times d}{2}$

A. trapecio = $\dfrac{B + b}{2} \times a$

A. romboide = b x a

A. paralelogramo = b x a

A. triángulo = $\dfrac{b \times a}{2}$

A. polígono reg. = $\dfrac{p \times ap.}{2}$

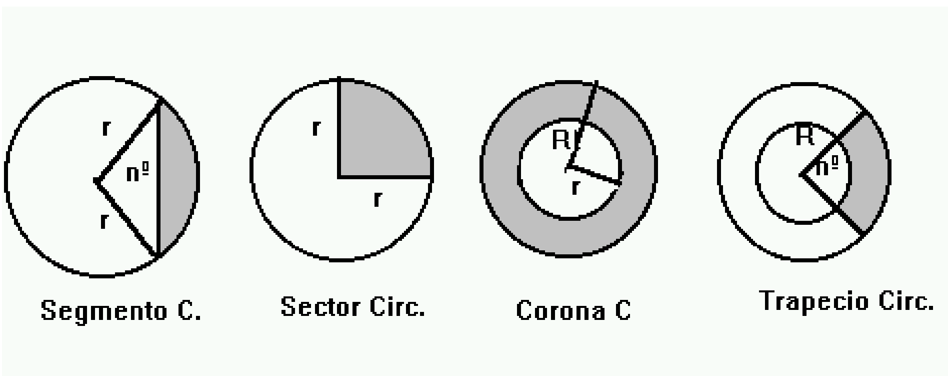
A. círculo = $\Pi \times r^2$

Sector circular = $\dfrac{\Pi r^2 \times n^o}{360^o}$

Seg. Circular = $\dfrac{\Pi r^2 \times n^o}{360^o}$ - A. Triángulo

Corona circular = $\Pi (R^2 - r^2)$

Trapecio circular = $\dfrac{\Pi (R^2 - r^2)}{360^o} \times n^o$



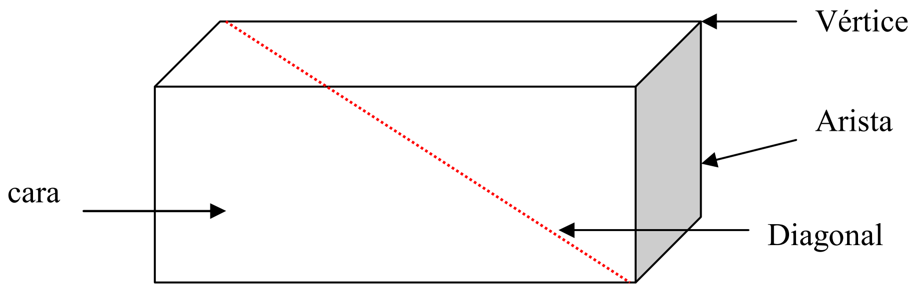
POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

POLIEDRO

Definición: es la superficie limitada por caras planas, o polígonos, que tienen un lado en común.

Elementos:

- **Caras**: cada una de las caras planas o polígonos que forman el poliedro.
- **Aristas**: los lados de las caras.
- **Vértices**: son los vértices de los polígonos que constituyen las caras. Un mismo vértice es común, como mínimo, a tres caras.
- **Ángulos diedros**: cada uno de los ángulos formados por dos caras que tienen una arista común.
- **Ángulos poliedros**: cada uno de los ángulos formados por tres o más caras que tienen un vértice en común.
- **Diagonales**: segmentos que unen dos vértices situados en distinta cara



Teorema o fórmula de Euler: en todo poliedro convexo, el número de caras más el de vértices es igual al número de aristas más dos.

Nº de caras + Nº de vértices = Nº de aristas + 2

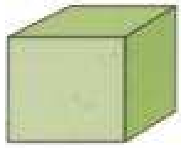
CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS

Poliedros irregulares: prismas y pirámides.

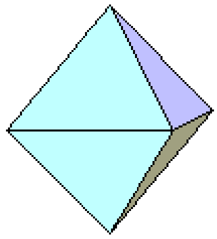
Poliedros regulares: son los poliedros que tienen todos sus ángulos iguales y sus caras son polígonos regulares iguales.

Poliedros Regulares	nº de caras y forma	nº de aristas	nº de vértices	superficie
TETRAEDRO	4 triángulos equiláteros	6	4	A = b . a / 2 x 4
HEXAEDRO	6 cuadrados iguales	12	8	A = l x l x 6
OCTAEDRO	8 triángulos equilátero	12	6	A = b . a / 2 x 8
DODECAEDRO	12 pentágonos regulares	30	20	A = P . ap / 2 x 12
ICOSAEDRO	20 triángulos equiláteros	30	12	A = b . a / 2 x 20

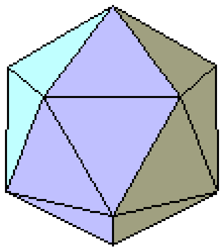
Tetraedro



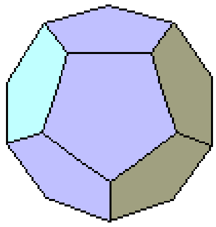
Hexaedro
o cubo



Octaedro

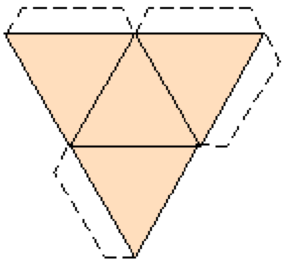


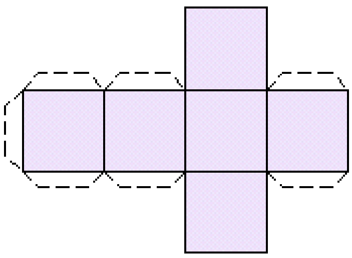
Icosaedro

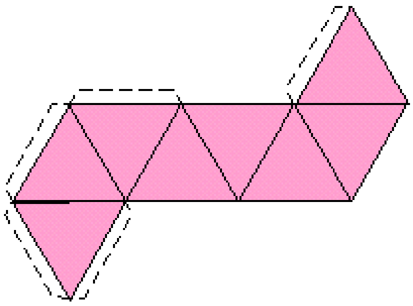


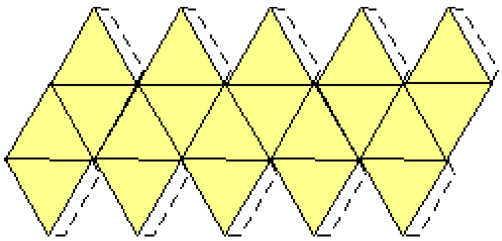
Dodecaedro

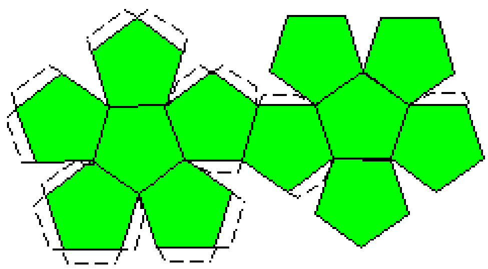
Desarrollos de los poliedros regulares









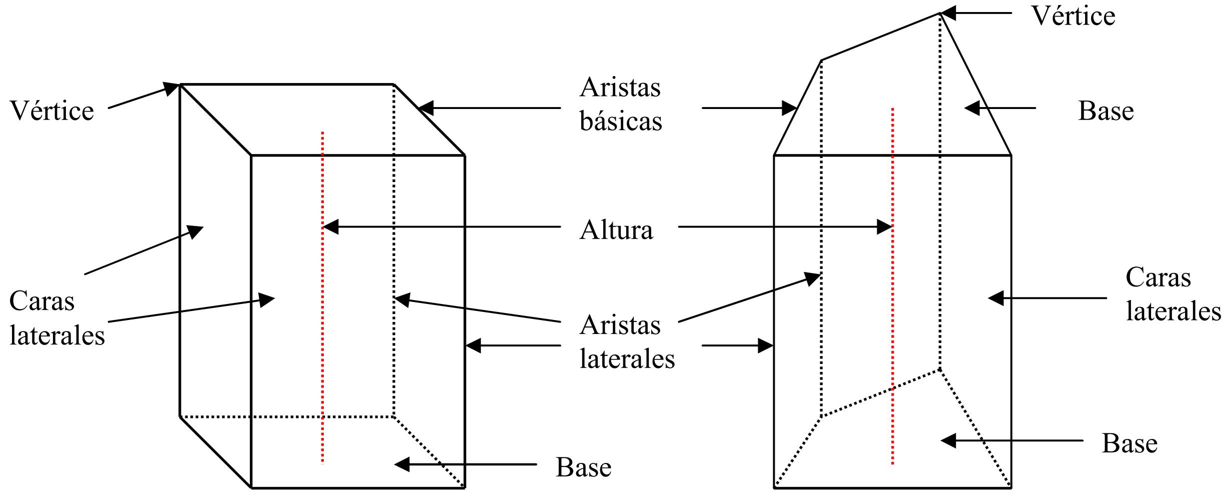


PRISMAS

Definición: poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales, llamadas bases, y las caras laterales son paralelogramos.

Elementos de un prisma:

- **Bases**: son las caras paralelas e iguales del prisma. Son dos bases.
- **Caras laterales**: son los paralelogramos que limitan al prisma. Hay tantas como lados tiene cada base.
- **Aristas básicas**: son los lados de las bases.
- **Aristas laterales**: son los lados que sólo pertenecen a las caras laterales o paralelogramos.
- **Vértice**: punto donde concurren tres aristas (dos básicas y una lateral).
- **Altura**: distancia perpendicular entre las dos bases.

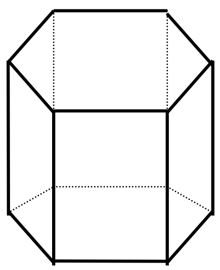


Los prismas **se nombran** añadiendo a su nombre el del polígono de sus bases:

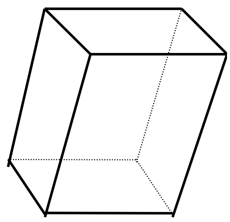
- Prisma triangular: bases triángulos
- Prisma cuadrangular: bases cuadriláteros.
- Prisma pentagonal: bases pentágonos.
- Prisma hexagonal: bases hexágonos…

Clasificación de los prismas

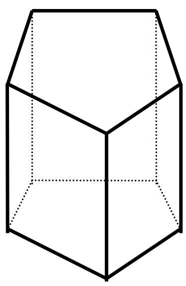
- **Prismas rectos**: son los prismas cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.
- **Prismas regulares**: son los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares (lados y ángulos iguales).
- **Paralelepípedos**: son los prismas cuyas bases son paralelogramos. Los más importantes son:
  - **Ortoedro**: paralelepípedo que tiene todas sus caras rectángulos.
  - **Hexaedro** o **cubo**: paralelepípedo que tiene todas sus caras cuadrados.



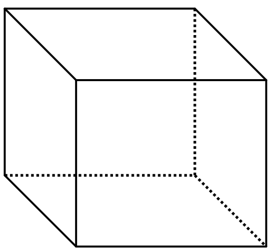
Prisma recto



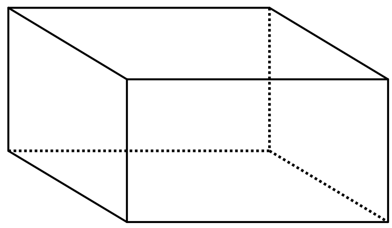
Prisma oblicuo



Prisma regular



Hexaedro o cubo



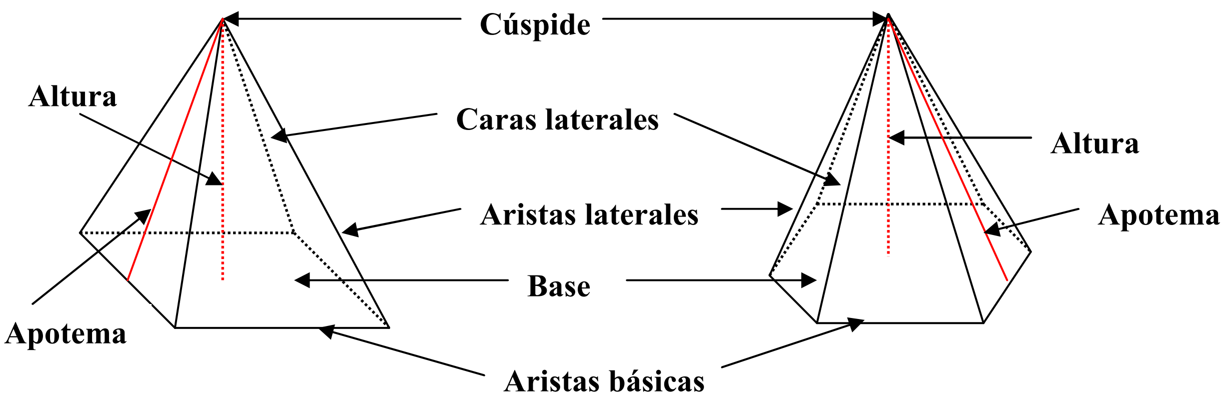
Ortoedro

PIRÁMIDES

Definición: poliedros que tienen una cara que es un polígono cualquiera, llamada base, y las caras laterales son triángulos que tienen un vértice común llamado cúspide.

Elementos de una pirámide:

- **Base**: es el polígono sobre el cual descansa la pirámide.
- **Caras laterales**: son los triángulos que limitan a la pirámide. Hay tantas como lados tiene la base.
- **Aristas básicas**: son los lados de las base.
- **Aristas laterales**: son los lados que sólo pertenecen a las caras laterales o triángulos.
- **Vértice**: punto donde concurren tres o más aristas.
- **Altura**: distancia perpendicular entre el vértice común o cúspide y la base.
- **Apotema**: es la altura de cualquiera de las caras laterales o triángulos.

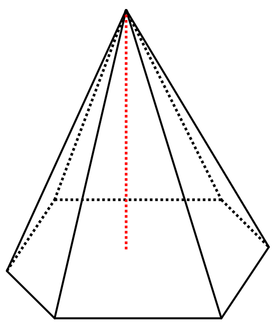


Las pirámides **se nombran** añadiendo a su nombre el del polígono de la base:

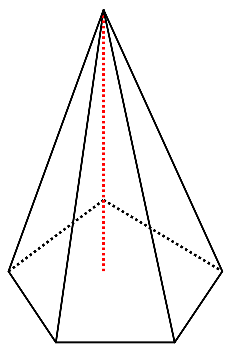
- Pirámide triangular: la base es un triángulo.
- Pirámide cuadrangular: la base es un cuadrilátero.
- Pirámide pentagonal: la base es un pentágono.
- Pirámide hexagonal: la base es un hexágono…

Clasificación de las pirámides

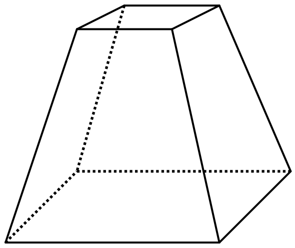
- **Pirámides rectas**: son las pirámides cuya altura cae al centro de la base; las caras laterales son triángulos isósceles.
- **Pirámides regulares**: son las pirámides rectas que tienen las caras laterales iguales y la base es un polígono regular (lados y ángulos iguales).



Pirámide regular



Pirámide recta



Pirámide truncada: es el poliedro que tiene dos bases paralelas y desiguales, y sus caras laterales son trapecios.

Pirámide truncada

CUERPOS REDONDOS

Los **cuerpos redondos** son cuerpos geométricos de revolución, ya que se pueden obtener al hacer girar una figura del plano en torno a un eje.

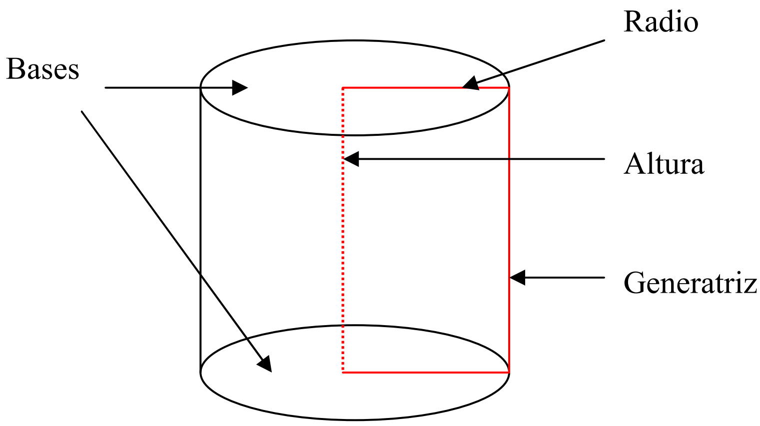
CILINDRO

Definición: cuerpo redondo engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados. Está formado por:

- Dos superficies planas, llamadas bases, que son dos círculos iguales y paralelos.
- Una superficie lateral curva llamada superficie cilíndrica

Elementos del cilindro:

- **Bases:** son los dos círculos iguales y paralelos.
- **Altura:** distancia perpendicular entre las dos bases.
- **Generatriz:** lado del rectángulo que genera la superficie cilíndrica.



Cilindro

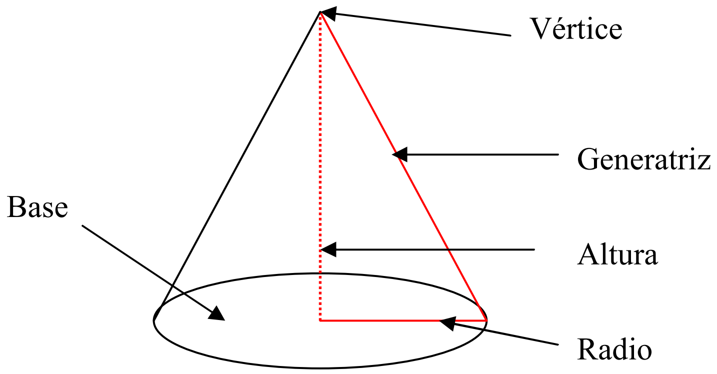
CONO

Definición: cuerpo redondo engendrado por un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno de sus catetos. Está formado por:

- Una superficie plana, llamada base, que es un círculo.
- Una superficie lateral curva llamada superficie cónica

Elementos del cilindro:

- **Base:** es el círculo.
- **Altura:** distancia perpendicular entre el vértice y la base.
- **Generatriz:** es la hipotenusa del triángulo rectángulo que genera la superficie cónica.



Cono

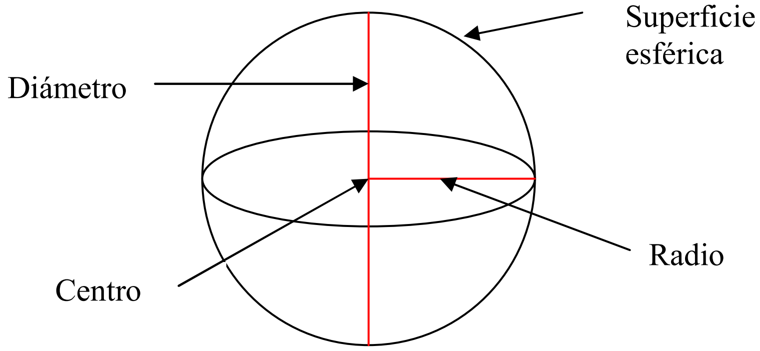
ESFERA

Definición: cuerpo redondo engendrado por un semicírculo al girar alrededor de su diámetro. Está formada por:

- Una superficie cerrada, llamada **superficie esférica**, cuyos puntos se hallan a igual distancia (equidistan) de un punto interior que es el centro de la esfera.

Elementos de la esfera:

- **Radio:** distancia entre el centro de la esfera y punto cualquiera de la superficie esférica.
- **Diámetro:** distancia entre dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro de la esfera.
- **Centro:** punto central de la esfera que equidista de cualquier punto de la superficie esférica.



Esfera

ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA: es la parte de las matemáticas que se ocupa de los métodos para **obtener**, **organizar**, **representar** e **interpretar** conjuntos de **datos**, frecuentemente muy numerosos

Conceptos básicos de la estadística:

- **Población**: es el conjunto de individuos u objetos que se quieren estudiar.
- **Carácter o variable estadística**: es una característica de los objetos o individuos de la población.
  - **Variables estadísticas cuantitativas:** si los valores que se toman son números.
  - “ “ **cualitativas:** si los valores no se expresan con números.
- **Encuesta o muestreo:** Es un estudio de las variables, sólo en una parte de la población, aplicando los resultados a la población en su conjunto. Se recurre a muestreo o encuestas cuando la población es tan numerosa que resulta muy costoso o incluso imposible realizar el estudio de todos los elementos de la población.
- **Muestra:** Es la parte de la población, de la que se toman los datos.
- **Moda:** es el valor con mayor frecuencia en la muestra o población.

- **Mediana:** es el valor que queda en el centro, si colocamos todos los datos ordenados. Cuando el número de datos es par, la mediana es la media de los dos valores que quedan en el centro.
- **Media:** se obtiene sumando todos los datos y dividiendo entre el número de datos.
- **Media ponderada:** se calcula sumando los productos de cada valor por su frecuencia y dividiendo entre la suma de las frecuencias.

Nº de miembros de la familia	**1**	**2**	**3**	**4**
Frecuencia absoluta	**80**	**120**	**100**	**50**

$$\text{Media ponderada} = \frac{80 \text{ x } 1 + 120 \text{ x } 2 + 100 \text{ x } 3 + 50 \text{ x } 4}{80 + 120 + 100 + 50} = \frac{820}{350} = 2{,}34$$

- **Frecuencias:**
  - **Frecuencia absoluta**: es el número de veces que se presenta un valor al estudiar una variable en una muestra.
  - **Frecuencia relativa:** es la proporción de las veces que se ha dado un cierto valor respecto al número total de individuos u objetos estudiados. Puede expresarse en **tanto por uno** o en **tanto por ciento**. Se halla dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de datos considerado. El **porcentaje** se obtiene multiplicando la frecuencia relativa por 100.

Formas de presentar la información

Las informaciones relativas a estudios se presentan de distintas formas, pero las principales son las **tablas** y los **gráficos**.

- Las **tablas** de frecuencias: indican, para cada valor o conjunto de valores, la frecuencia absoluta o la frecuencia relativa en alguna de sus formas.

Intención de comprar coche		
	Fr. Abs.	Fr. Rel. %
Sí	250	250: 1000= 25 %
No	750	750: 1000= 75 %

Dinero ahorrado					
	Menos de 1 millón	Entre 1 y 2 millones	Entre 2 y 3 millones	Entre 3 y 4 millones	Más de 4 millones
Fr. Abs.	450	260	140	95	55
Fr. Rel.	450: 1000 = 0,45	260: 1000 = 0,26	140: 1000 = 0,14	95: 1000 = 0,095	55: 1000 = 0,55
	45 %	26 %	14 %	9,5 %	5,5 %

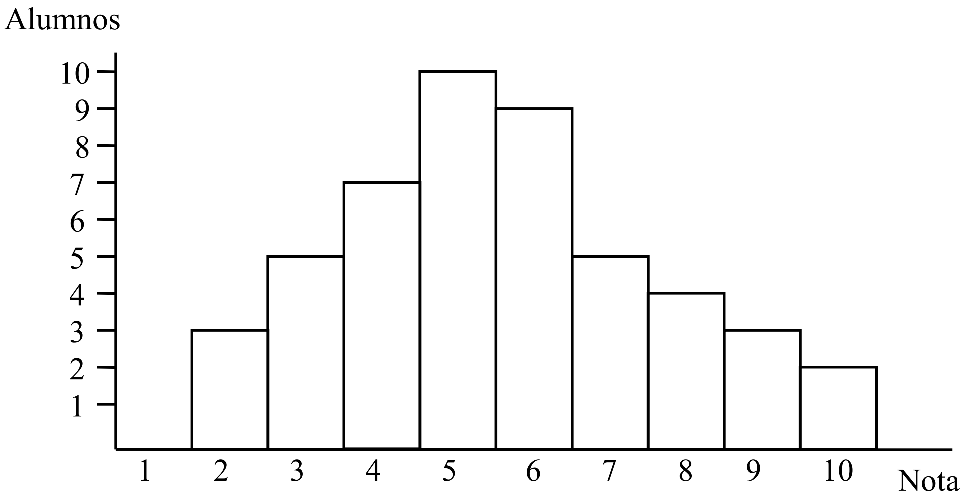
La **suma de las frecuencias absolutas** debe ser igual al **número total de objetos o individuos** estudiados.

La **suma de las frecuencias relativas** debe ser **igual a 1 ó 100**, según estén expresadas en tanto por uno o en porcentaje. Sin embargo, en algunos casos puede resultar un valor próximo a 1 ó a 100 debido a los redondeos de las frecuencias relativas.

45 % + 26 % + 14 % + 9,5 % + 5,5 % = 100 %

0,45 + 0,26 + 0,14 + 0,095 + 0,055 = 1

- **Gráficos** estadísticos: se utilizan para presentar informaciones estadísticas.
  - **Diagramas de barras**: son gráficos en los que se representan las frecuencias correspondientes a cada valor de la estadística mediante líneas o barras, pueden ser verticales u horizontales.
  - **Histogramas**: son similares a los diagramas de barras. Representan frecuencias de clases o intervalos mediante rectángulos.
  - **Pictogramas**: también similares a los diagramas de barras, y a veces a los histogramas. Se sustituyen las barras por dibujos de distintos tamaños o un mismo dibujo repetido varias veces.
  - **Polígonos de frecuencias**: se obtienen a partir de diagramas de barras o histogramas uniendo con líneas los extremos de las barras o los centros de los lados superiores de los rectángulos.
  - **Diagramas de sectores**: las frecuencias se pueden representar con diagramas de sectores, basados en círculos.
  - **Cartogramas**: son mapas que aportan datos estadísticos utilizando colores, símbolos o barras.



Histograma

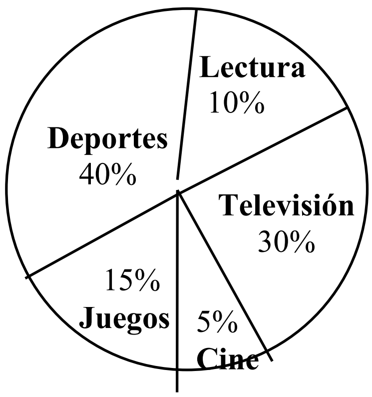


Diagrama de sectores

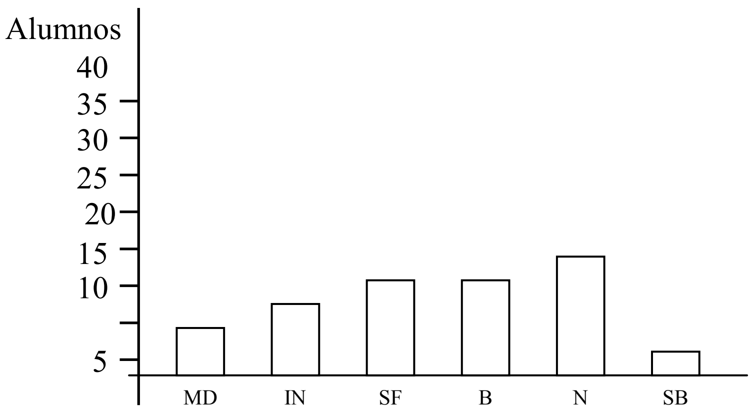
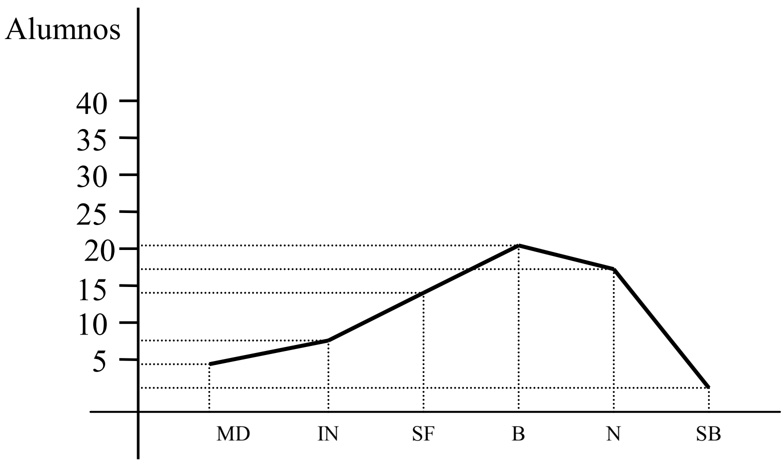


Diagrama de barras



Polígono de frecuencias

AZAR Y PROBABILIDAD

FENÓMENOS ALEATORIOS

- Fenómeno o experimento **aleatorio**: si es imposible predecir el resultado cada vez que sucede o se realiza.

  Ejemplo: lanzar un dado al aire o una moneda

- Los **sucesos** son los posibles resultados de un experimento o fenómeno aleatorio.
  - Sucesos **elementales**: son los resultados más sencillos de un experimento

    Por ejemplo: salir 1, salir 2, salir 3, salir 4, salir 5 y salir 6.
  - Sucesos **compuestos**: son los que pueden considerarse como conjuntos de varios sucesos elementales.

    Por ejemplo: Salir impar (incluye salir 1, salir 3 y salir 5)

    Salir más de 2 (incluye salir 3, salir 4, salir 5 y salir 6).
- Tipos de sucesos:
  - Un suceso es **imposible**, si nunca ocurre al realizar el experimento. Salir un 8 al lanzar un dado.
  - Un suceso es **seguro**, si siempre ocurre al realizar el experimento. Salir menos de 8 al lanzar un dado.
  - Dos sucesos son **opuestos** o **contrarios**, si cuando ocurre uno no ocurre el otro y viceversa (salir impar y salir par).

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

- La **probabilidad de un suceso** es una medida que indica la facilidad o dificultad para que ese suceso ocurra.
- **Frecuencia absoluta**: es el número de veces que se ha obtenido el suceso.
- **Frecuencia relativa**: se halla dividiendo cada una de las frecuencias absolutas de los sucesos entre el número total de pruebas que se han llevado a cabo.

Resultado del experimento aleatorio de lanzar 20 veces un dado			
Suceso elemental	**Recuentos**	**Frecuencias Absolutas**	**Frecuencias relativas**
Salir: 1	I I I I	4	4 : 20 = 0,2
Salir: 2	I I I I I I	6	6 : 20 = 0,3
Salir: 3	I I I	3	3 : 20 = 0,15
Salir: 4	I I	2	2 : 20 = 0,1
Salir: 5	I I I I I	5	5 : 20 = 0,25
Salir: 6		0	0 : 20 = 0

- La **probabilidad** es el valor que se acerca la frecuencia relativa de un suceso al repetir muchas veces el experimento.

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Nº de casos favorables al suceso}}{\text{Nº de casos posibles en el experimento}}$$

Por **ejemplo**: al lanzar un dado probabilidad de que salga un número par

Casos favorables: incluye salir 2, salir 4 y salir 6, total 3 casos favorables.

Casos posibles: cualquier número del dado, por tanto 6 casos.

Probabilidad = 3 : 6 = **0,5**

Se puede **expresar** la probabilidad en:

- Número decimal….. 3 : 6 = 0,5
- Porcentaje………… 0,5 x 100 = 50 % (nº decimal por 100)
- Fracción………….. 3 / 6 = 1 / 2

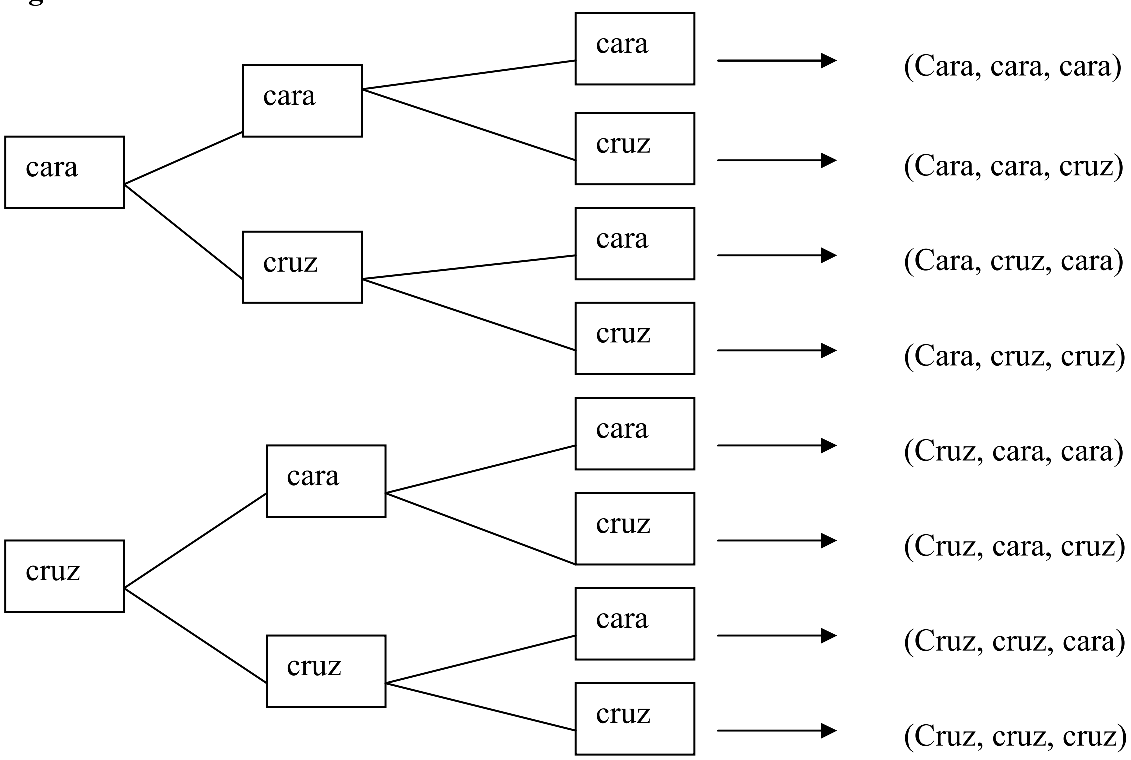
TÉCNICAS DE RECUENTO: Diagramas

Entre las **técnicas** de mayor sencillez para el **recuento**, tenemos los **diagramas de árbol**, que son gráficos de líneas que presentan de forma esquemática todos los posibles sucesos elementales de un experimento aleatorio.

Ejemplo: lanzar al aire tres monedas

Casos posibles = 2 x 2 x 2 = 8 --- Se multiplican los casos posibles de cada moneda.

Diagrama de árbol:



Ejemplo: lanzar al aire una moneda y un dado

Casos posibles = 2 x 6 = 12 --- casos posibles de la moneda x casos posibles del dado

Intenta hacer el diagrama de árbol.